Lycée Arago Perpignan
M. Chambeu MPSI 2016/2017

Bonjour à tous et félicitations pour votre admission au Lycée Arago de Perpignan.

Je serai votre professeur de mathématiques (et d'informatique) dans la classe de MPSI du lycée Arago (classe préparatoire aux grandes écoles).

Avec ce document je souhaite vous présenter les premiers chapitres traités en MPSI pour bien débuter l'année scolaire.

Attention il faut prendre au sérieux la classe préparatoire : c'est un niveau au-dessus du lycée. Conseil le plus important pour votre rentrée : arriver en forme! Les révisions peuvent être essentielles à certains pour ne pas démarrer avec du retard. Une des principales différences avec la terminale : le cours sera à apprendre et à connaître en détails. Plus de calculatrice autorisée en devoirs surveillés en mathématiques donc les formules devront être dans votre tête!

Si vous avez besoin de précision vous pouvez me joindre à l'adresse

mpsiarago@sfr.fr

Pour chaque chapitre je vais distribuer (pendant l'année scolaire) une feuille résumé du cours (parfois le cours version polycopié) et une feuille d'exercices avec des points méthodes.
Voilà les documents (cours-résumé-exercices) du mois de septembre et du mois d'octobre. Certaines parties sont nouvelles, d'autres des révisions de terminale. Je ne vous impose RIEN mais je vous conseille de lire ces documents et de travailler ce qui concerne les parties révisions.

PS : le premier chapitre est un peu particulier et ne contient que des méthodes, il est important mais tous les autres chapitres seront bien différents de ce chapitre.

PPS : certains fichiers de cours sont des poly à trous nous les compléterons ensemble!

PPPS : on ne s'inquiète pas en voyant cet énorme fichier, vous n'êtes pas censés comprendre tout ce qui est raconté (c'est mon métier de vous l'expliquer). Je donne l'ensemble de ces documents pour vous dire ce que l'on va traiter en premier l'an prochain. N'hésitez pas à passer des parties qui vous semblent difficiles et à lire des parties ressemblant au cours de terminale. Et si besoin, doute ou autre je suis disponible par mail pour vous orienter.

BONNES VACANCES
ET A L'AN PROCHAIN

Lycée Arago Perpignan MPSI
Cours

Chapitre 1 Pour bien démarrer, bases de la logique

1 Quantificateurs

Cadre : dans ce paragraphe on se donne une propriété $\mathcal{P}$ portant sur un ou plusieurs objets. Par exemple si $\mathcal{P}$ est la proposition « être un entier », on notera $\mathcal{P}(2)$ la phrase « 2 est un entier ». Autre exemple si $\mathcal{P}$ est la proposition « avoir un produit entier », on notera $\mathcal{P}(3, \frac{5}{3})$ la phrase « le produit de 3 et de 5/3 est un entier ». (On nomme prédicat ce type de proposition).

- Le symbole $\forall$ signifie « pour tout », « quelque soit » (quantificateur universel).
- $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ signifie « Tous les éléments de E vérifient la propriété $\mathcal{P}$ et se lit « Pour tout x élément de E, x vérifie $\mathcal{P}$ ».
- Le symbole $\exists$ signifie « il existe » (quantificateur existentiel)
- $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ signifie « L'un au moins des éléments de E vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et se lit « Il existe un élément x de E tel que x vérifie $\mathcal{P}$ ». On écrit aussi $\exists x \in E \mid \mathcal{P}(x)$
- Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple
- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ » est une proposition vraie alors que « $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$ » est fausse.
- « $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists a \in \mathbb{N}, ra \in \mathbb{Z}$ » est vraie, en effet
- « $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$ » est fausse, en effet

Remarque La formulation $\forall x, y \in \mathbb{R}$ est un raccourci d'écriture pour dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$.

<u>Attention</u> ! L'ordre des quantificateurs est important : on ne peut pas permuter un $\forall$ et un $\exists$ sans changer le sens de la proposition. Par contre, on peut changer l'ordre de plusieurs $\forall$ qui se suivent ou de plusieurs $\exists$ qui se suivent.

Exemple Comparons les proposition suivantes P_1 « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \mid x+y = 2$ » et P_2 « $\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ x+y = 2$ »

Exemple Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comparons les proposition suivantes P_1 « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant M$ » et P_2 « $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ »

2 Ensemble

2.A Appartenance et inclusion

On se contentera de la définition intuitive d'un ensemble : on appelle *ensemble* une collection d'objets. Ces objets sont appelés les *éléments* de l'ensemble.
Exemples :
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$

Si E est un ensemble de réels, notations E_+, E_- et E^* :

Notions d'intervalles, de segments, d'intervalles d'entiers :

Définition L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* et est noté $\emptyset$. Un ensemble à un élément est appelé un *singleton*, un ensemble à deux éléments est une *paire*.
On dit que x *appartient* à un ensemble E si x est un élément de E et on note alors $x \in E$.

Définition
- Un ensemble est dit défini *en extension* lorsqu'il est défini par l'énumération de ses éléments. Par exemple, $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- Un ensemble est dit défini *en compréhension* lorsqu'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs est $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$. Ce dernier ensemble peut aussi se noter plus simplement $\{2k | k \in \mathbb{N}\}$ (ou encore plus simplement $2\mathbb{N}$).

Définition [Inclusion] On dit qu'un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on note alors $E \subset F$. De manière plus concise,

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F)$$

Exemple On a la suite d'inclusion bien connue : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Attention ! Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.
- On a bien $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \not\subset \mathbb{N}$. Néanmoins, $\{0\} \subset \mathbb{N}$. On a aussi $\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}$.
- On a bien $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{-1, 0, 1\} \notin \mathbb{Z}$.

Définition [Partie] On appelle partie d'un ensemble E tout ensemble F inclus dans E. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Pour tout ensemble F on a donc

$$F \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow F \subset E$$

En particulier $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$

Exemples :

Définition [Egalité] On dit que deux ensmbles E et F sont *égaux* si tout élément de E est un élément de F et réciproquement. On note alors $E = F$. De manière plus concise,

$$(E = F) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

Proposition Soient E et F deux ensembles alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Méthode Inclusion et égalité en pratique
- Pour montrer que $E \subset F$, on montre que tout élément de E est un élément de F. On rédige donc de la manière suivante : « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ ».
- Pour montrer que $E = F$, on peut soit montrer que $x \in E$ si et seulement si $x \in F$ en raisonnant par équivalence, soit procéder par *double inclusion* en montrant que $E \subset F$ et $F \subset E$. Dans ce cas, la rédaction se fait en deux étapes :
  - ▷ « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ ».
  - ▷ « Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$ ».

On peut également raisonner directement sur les ensembles sans considérer les éléments.

Exemple Montrons que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | \ \forall y \in \mathbb{R}_+, \ x \leqslant y\}$.

2.B Opérations sur les ensembles

Définition [Intersection, union] Soient A et B deux ensembles.
- On appelle *intersection* de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ET } x \in B)$$
- On appelle *union* de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ OU } x \in B)$$

Graphiquement :

Définition [Intersection et union d'une famille d'ensembles] Ces définitions se généralisent à plus de deux ensembles. En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles.

- On appelle *intersection* des A_i, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *tous* les A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$$
- On appelle *union* des A_i, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *au moins un* des A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i)$$

Exemple Déterminer pour $n = 2$, $n = 3$ puis $n \to +\infty$ les ensembles $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} [0; 1 - \frac{1}{k}]$ et $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} [0; 1 - \frac{1}{k}]$.

Proposition [Distributivité de l'intersection et de l'union l'une sur l'autre] Soient A, B, C trois ensembles.
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
Cette propriété se généralise à une famille infinie d'ensembles :
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

Démonstration On ne montre que la première égalité :
$$x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) \;\; \textit{et} \;\; x \in A \Longleftrightarrow (\exists i \in I \mid x \in B_i) \; \textit{et} \; x \in A$$
$$\Longleftrightarrow \exists i \in I \mid (x \in B_i \; \textit{et} \; x \in A) \Longleftrightarrow \exists i \in I \mid x \in A \cap B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

Définition [Différence, complémentaire]

- Soient A et B deux ensembles. On appelle différence de B dans A, notée $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. De manière plus concise,
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ET } x \notin B)$$
- Soit E un ensemble et A une partie de A. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $E \setminus A$ et on le note $\complement_E A$, ou A^c ou $\bar{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence E. De manière plus concise,
$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Graphiquement :

Exemple A connaître

▷ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

▷ Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Proposition [De Morgan] Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Là aussi, ces propriétés se généralisent à des familles de parties d'un même ensemble E.
Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un même ensemble E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

Démonstration Uniquement la première : soit $x \in E$

$$x \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \iff \text{NON } (x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \iff \text{NON } (\forall i \in I \mid x \in A_i) \iff \exists i \in I, x \notin A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

2.C Famille

Définition [Famille] Soit E et I deux ensembles. On appelle *famille d'éléments de E indexée sur I* une collection d'éléments de E dont chacun est indexé par un élément de I. Une telle famille est notée $(x_i)_{i \in I}$ où les x_i sont les éléments de E en question. I est appelé l'ensemble d'indexation. L'ensemble des familles d'éléments de E indexée sur I se note E^I.

Exemple Très souvent, I est une partie de $\mathbb{N}$ du type $[\![m, n]\!]$. On note peut alors noter la famille $(x_i)_{m \leqslant i \leqslant n}$. Une famille indexée sur $\mathbb{N}$ est tout simplement une suite. D'où les deux types de notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \geqslant 0}$. L'ensemble des suites réelles se note donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Attention ! Prendre garde à ne pas confondre la famille $(x_i)_{i \in I}$ et l'ensemble $\{x_i\}_{i \in I}$. Un ensemble est une collection *non ordonnée* d'objets. Par exemple, $\{1, 3, 5, 7\}$ et $\{3, 7, 1, 5\}$ représentent le même ensemble. Par contre, $(1, 3, 5, 7)$ et $(3, 7, 1, 5)$ représentent deux familles différentes. De plus, la description d'un ensemble par extension ne peut contenir qu'une seule fois le même élément ($\{4, 2, 1, 2\}$ ne décrit pas un ensemble). Au contraire une famille peut contenir plusieurs fois le même élément ($(4, 2, 1, 2)$ est bien une famille).

Définition [n-uplet] On appelle n-uplet une famille à n éléments (autrement dit qui peut être indexée sur $[\![1, n]\!]$). Un 2-uplet s'appelle aussi un *couple*, un 3-uplet un *triplet*, etc. . . .

2.D Produit cartésien

Définition [Produit cartésien] Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ n ensembles. On appelle *produit cartésien* des ensembles E_i, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, le produit cartésien se note E^n.

Exemple $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Remarque Dans une proposition avec quantificateurs,
— $\forall x \in E, \forall y \in F$ signifie la même chose que $\forall (x, y) \in E \times F$;
— $\exists x \in E, \exists y \in F$ signifie la même chose que $\exists (x, y) \in E \times F$

3 Propositions logiques

3.A Définition, négation, conjonction *et*, disjonction *ou*

On appelle proposition un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux. Toute proposition admet donc ce que l'on appelle une valeur de vérité V ou F.

Exemple
— « $2 + 2 = 4$ » est une proposition vraie.
— « $\sqrt{2}$ est un rationnel » est une proposition fausse (que nous allons démontrer).

Définition A une proposition P, on peut associer sa négation notée NON P (ou $\neg P$) qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

Méthode [Tables de vérité] Une table de vérité donne la véracité d'une proposition dépendant d'une ou deux propositions P et Q (ou plus) en fonction de la véracité de P et Q.

Exemple Tables de vérité de NON P et de NON (NON P)

Définition [Conjonction] A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction de P et Q notée P ET Q qui est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies et fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.

Définition [Disjonction] A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction P OU Q qui est vraie si l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie et fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.

Remarque Le « ou » considéré ici est un « ou » *non exclusif.* La proposition P OU Q est vraie si *l'une au moins* des deux propositions P ou Q est vraie et non si exactement une des propositions est vraie.

Tables de vérité de ces deux connecteurs logiques :

3.B Implication et équivalence

Définition [Implication] A deux propositions P et Q, on peut associer la proposition $P \Rightarrow Q$ qui est vraie si [P est fausse ou si P est vraie et Q vraie] et fausse si [P est vraie et Q fausse].(table de vérité ci-dessus)

Remarque La notation $P \Rightarrow Q$ correspond en français à la phrase « si P alors Q » ou encore « P implique Q ». On voit en particulier que si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie que Q soit vraie ou fausse, ce qui pourrait se traduire de la sorte : à partir d'un point de départ faux, on peut prouver n'importe quoi ! Par exemple la phrase « si « 0=2 » alors « 1=3 » » est vraie mais on sait bien que $0 \neq 2$ et $1 \neq 3$ (enfin on le pense...)

Exemple Soient a et b deux réels. Alors $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ est vraie mais $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ est fausse.

Remarque La négation de la proposition $P \Rightarrow Q$ est la proposition P ET NON Q.
Table de vérité :

Exemple Donner la negation de la phrase : si $x \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{Q}$

Définition [Equivalence] A deux propositions P et Q, on peut associer la proposition $P \Leftrightarrow Q$ qui est vraie si [P et Q sont vraies ou si P et Q sont fausses] et qui est fausse sinon.
La notation logique $P \Leftrightarrow Q$ correspond en français à la phrase « P si et seulement si Q ».

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$.

Proposition Soient P et Q deux propositions. On a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P))$$

La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée la **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Proposition Soient P et Q deux propositions. On a :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{NON } Q \Rightarrow \text{NON } P)$$

La proposition NON $Q \Rightarrow$ NON P est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Démonstration Table de vérité

Définition Soient P et Q deux propositions.
- On dit que Q est une **condition *nécessaire*** pour avoir P si, dès que P est vraie alors nécessairement (forcément) Q est vraie. Autrement dit $P \Rightarrow Q$.
- On dit que Q est une **condition *suffisante*** pour avoir P s'il suffit que Q soit vraie pour que P soit vraie. Autrement dit $Q \Rightarrow P$.
- On dit que Q est une **condition *nécessaire et suffisante*** pour avoir P quand P est vraie si et seulement si Q est vraie. Autrement dit $P \Leftrightarrow Q$.

Proposition [Lois de De Morgan] *A démontrer en exercice*
Soient P et Q deux propositions logiques. Alors on a :

$$\text{NON } (P \text{ ET } Q) \Leftrightarrow ((\text{NON } P) \text{ OU } (\text{NON } Q)) \qquad \textit{et} \qquad \text{NON } (P \text{ OU } Q) \Leftrightarrow ((\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q))$$

3.C Négation d'une proposition avec quantificateurs

Quelle est la négation de la phrase " tous mes élèves sont nuls en maths" ?
La négation de la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est la proposition « $\exists x \in E \mid \text{NON } P(x)$ ».
La négation de la proposition « $\exists x \in E \mid P(x)$ » est la proposition « $\forall x \in E, \text{NON } P(x)$ ».

Méthode Pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement.
La négation de « $\forall x, \exists y, P(x,y)$ » est « $\exists x, \forall y, \text{NON } P(x,y)$ ».

Exemple La négation de la proposition « tous mes élèves sont nuls » *n'est pas* la proposition « aucun élève n'est nul » mais la proposition « il existe un élève qui n'est pas nul ». En effet, si x désigne un élève, la proposition de départ peut s'écrire « $\forall x, x$ est nul ». Sa négation est donc « $\exists x, x$ n'est pas nul ».

4 Rédactions types et Méthodes de démonstration

4.A Savoir rédiger

- On ne mélange pas ces symboles et des phrases : soit on écrit une phrase en français, soit on écrit une phrase mathématique avec uniquement des symboles mathématiques. Seule exception : le symbole d'appartenance, on peut écrire "soit $x \in E$" à la place de "soit x un élement de E".
- Quand on demande de prouver une proposition du type $\forall x \in A, P(x)$, la rédaction commence *TOUJOURS* par « Soit $x \in A$ ». On essaye ensuite de montrer que ce x vérifie la propriété P.
- Quand on demande de prouver une proposition du type $\exists x \in A, P(x)$, il suffit de trouver *UN* x dans A tel que $P(x)$ est vraie.
- Quand on demande de prouver une proposition du type $\exists! x \in A, P(x)$ on a deux choses à montrer : l'existence puis l'unicité (rédaction typique : on suppose qu'on a deux éléments vérifiant la propriété et on montre que ces deux éléments sont égaux).

Exemple Pour prouver que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x+y$, on commence la rédaction de la manière suivante : « *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ ». Maintenant que x et y sont fixés, il suffit de trouver z supérieur à $x+y$. Ici, nous avons le choix. On achève la démonstration de la manière suivante : « *Posons* $z = x+y+1$. Alors $z > x+y$ ». Et c'est terminé !

Exemple Prouvons que $\exists! x \in \mathbb{R}_+^* \mid x^2 = 1$.

4.B Raisonnement par implication

C'est le type de raisonnment standard. Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on suppose P vraie et on montre que Q est vraie. La démonstration commence donc par *« Supposons P et montrons Q »*. On passe ensuite de P à Q en utilisant à chaque fois des implications. Sur votre copie indiquer les liens entre les différentes phrases en utilisant des connecteurs logiques du type : donc, alors, ainsi, par conséquent, or, de plus, ensuite, enfin... NE PAS les remplacer par le symbole $\Rightarrow$.

Exemple ($\diamond$) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.

Exemple Montrons que : $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0;1\}$.

4.C Raisonnement par contraposée

Pour prouver qu'une proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on montre que NON $Q \Rightarrow$ NON P est vraie : en pratique, on suppose que NON Q est vraie et on montre que NON P est vraie.

Exemple Montrons la réciproque de l'exemple ($\diamond$).

4.D Raisonnement par double implication

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on suppose P vraie et on montre que Q est vraie et réciproquement. La démonstration se fait donc en deux temps : une première débutant par *« Supposons P et montrons Q »* et une seconde débutant par *« Supposons Q et montrons P »*. On passe ensuite de P à Q et de Q à P en utilisant à chaque fois des implications.

Exemple Nous avons donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Exemple Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

4.E Raisonnement par équivalence

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on peut également procéder en une seule étape. On passe alors de P à Q en utilisant à chaque fois des équivalences. Cette méthode est plus courte que la précédente (une seule étape au lieu de deux) mais peut aussi être plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication.
Le raisonnement par équivalence est généralement réservé à la résolution d'équations et d'inéquations. On lui préférera en général le raisonnement par double implication.

Attention ! Dans 90% des cas, on vous demande de montrer des implications plutôt que des équivalences. Le raisonnement par équivalence est donc souvent inutile et générateur d'erreurs logiques. En clair, je ne veux pas voir des copies remplies de symboles $\Longleftrightarrow$ dont la plupart sont faux et inutiles.

Exemple Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

4.F Raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une proposition P est vraie, on montre que la proposition NON P est fausse : en pratique, on suppose que P est fausse et on aboutit à une contradiction.

Exemple Prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4.G Disjonction des cas

Montrons que si $n \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

4.H Récurrence

On considère une proposition qui dépend d'un entier n notée $\mathcal{P}_n$ ou $\mathcal{P}(n)$. $\mathcal{P}(n)$ est appelée l'hypothèse de récurrence. On veut montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La méthode est la suivante :

Initialisation On montre que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité On montre que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. On rédige de la manière suivante :
« Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$ ».

Conclusion Par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entire naturel n.

Remarque Si on vous demande de prouver qu'une propriété est vraie pour tout *entier* (ou pour tout entier supérieur à ...), il faut immédiatement penser à un raisonnement par récurrence. Cela fonctionnera très souvent.

Exemple Suite géométrique : soit q un réel non nul, on considère la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = qu_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel on a $u_n =$

Remarque On peut vous demander de prouver une proposition pour $n \geqslant n_0$, on adapte alors la récurrence et la rédaction : on initialise avec $\mathcal{P}_{n_0}$ et on suppose $\mathcal{P}_n$ pour un certain $n \geqslant n_0$.

Attention ! Dans l'hypothèse de récurrence ne doit jamais figurer « $\forall n$ » ou « pour tout n » : l'hypothèse de récurrence porte sur un seul entier n à la fois. Dans la phase d'hérédité, je ne veux jamais voir écrit : « on suppose $\mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». Ceci signifie que vous supposez ce que vous voulez montrer. La conclusion est le seul endroit où doit figurer « $\forall n$ » ou « pour tout n ».

4.I Autres récurrences

Principe de récurrence double

Initialisation On montre que les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

Hérédité On montre que $\mathcal{P}_n$ ET $\mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. On rédige de la manière suivante : « Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ et on montre $\mathcal{P}_{n+2}$ ».

Conclusion Par principe de récurrence double, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que pour tout n entier naturel non nul on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Principe de récurrence forte

Initialisation On montre que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité On montre que ($\mathcal{P}_0$ ET $\mathcal{P}_1$ ET $\ldots$ ET $\mathcal{P}_{n-1}$ ET $\mathcal{P}_n$) $\Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. On rédige de la manière suivante :
« Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_k$ pour tout $k \in \{0, 1.., n\}$ et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$ ».

Conclusion Par principe de récurrence forte, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Montrer que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit fini de nombres premiers.

4.J Raisonnement par analyse-synthèse

Un raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux étapes :
- l'analyse : on raisonne sur une hypothétique solution du problème et on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution ;
- la synthèse : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats possibles à être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

Il arrive souvent que la phase d'analyse produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un « candidat » qui les vérifie. Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution, et la phase de synthèse permet de montrer soit l'existence d'une solution (si ce candidat répond au problème), soit (sinon) qu'il n'y a aucune solution.

Exemple Montrons que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exemple Montrons que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est majorée par un réel positif ou nul.

5 Ensembles

5.A Appartenance et inclusion

On se contentera de la définition intuitive d'un ensemble : on appelle *ensemble* une collection d'objets. Ces objets sont appelés les *éléments* de l'ensemble.
Exemple : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Si E est un ensemble : notations E_+, E_- et E^*

Définition L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* et est noté $\emptyset$. Un ensemble à un élément est appelé un *singleton*, un ensemble à deux éléments est une *paire*.

Définition [Appartenance] On dit que x *appartient* à un ensemble E si x est un élément de E et on note alors $x \in E$.

Définition Définition d'un ensemble en extension ou en compréhension
- Un ensemble est dit défini *en extension* lorsqu'il est défini par l'énumération de ses éléments.
  Par exemple, $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- Un ensemble est dit défini *en compréhension* lorsqu'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments.
  Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs est $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$. Ce dernier ensemble peut aussi se noter plus simplement $\{2k | k \in \mathbb{N}\}$ (ou encore plus simplement $2\mathbb{N}$).

Définition [Inclusion] On dit qu'un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on note alors $E \subset F$. De manière plus concise,

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F)$$

Exemple On a la suite d'inclusion bien connue : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Attention ! [Appartenance et inclusion] Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.
- On a bien $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \not\subset \mathbb{N}$. Néanmoins, $\{0\} \subset \mathbb{N}$.
- On a bien $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{-1, 0, 1\} \notin \mathbb{Z}$.

Définition [Partie] On appelle partie d'un ensemble E tout ensemble F inclus dans E. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Pour tout ensemble F on a donc

$$F \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow F \subset E$$

En particulier $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$

Définition [Egalité] On dit que deux ensmbles E et F sont *égaux* si tout élément de E est un élément de F et réciproquement. On note alors $E = F$. De manière plus concise,

$$(E = F) \Leftrightarrow (\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

Proposition Soient E et F deux ensembles alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Méthode Inclusion et égalité en pratique

- Pour montrer que $E \subset F$, on montre que tout élément de E est un élément de F. On rédige donc de la manière suivante : « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ ».
- Pour montrer que $E = F$, on peut soit montrer que $x \in E$ si et seulement si $x \in F$ en raisonnant par équivalence, soit procéder par *double inclusion* en montrant que $E \subset F$ et $F \subset E$. Dans ce cas, la rédaction se fait en deux étapes :
  - ▷ « Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$ ».
  - ▷ « Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$ ».

On peut également raisonner directement sur les ensembles sans considérer les éléments.

Exemple Montrons que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | \ \forall y \in \mathbb{R}_+, \ x \leqslant y\}$.

Exercice 1 *Montrer que* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ Re(z) = 0\}$.

5.B Opérations sur les ensembles

Définition [Intersection, union] Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *intersection* de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ET } x \in B)$$
- On appelle *union* de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ OU } x \in B)$$

Graphiquement :

Définition [Intersection et union d'une famille d'ensembles] Ces définitions se généralisent à plus de deux ensembles. En effet, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles.

- On appelle *intersection* des A_i, notée $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *tous* les A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$$
- On appelle *union* des A_i, notée $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans *au moins un* des A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i)$$

Exemple Domaine de définition de la fonction tangente :

Exercice 2 1. *Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.*
2. *Montrer que $(A \cap B = A \cap C$ ET $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$*

Proposition [Distributivité de l'intersection et de l'union l'une sur l'autre] Soient A, B, C trois ensembles.
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
Cette propriété se généralise à une famille infinie d'ensembles :
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$$

Démonstration On ne montre que la première égalité :
$$x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \quad \textit{et} \quad x \in A \Longleftrightarrow (\exists i \in I \mid \ x \in B_i) \textit{ et } x \in A$$
$$\Longleftrightarrow \exists i \in I \mid (x \in B_i \textit{ et } x \in A) \Longleftrightarrow \exists i \in I \mid x \in A \cap B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$$

Définition [Différence, complémentaire]

- Soient A et B deux ensembles. On appelle différence de B dans A, notée $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. De manière plus concise,
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ET } x \notin B)$$
- Soit E un ensemble et A une partie de A. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $E \setminus A$ et on le note $\complement_E A$, ou A^c ou $\bar{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence E. De manière plus concise,
$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Graphiquement :

Exemple A connaître

- ▷ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- ▷ Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Proposition [De Morgan] Soient A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Là aussi, ces propriétés se généralisent à des familles de parties d'un même ensemble E.
Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un même ensemble E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

Démonstration Uniquement la première : soit $x \in E$

$$x \in \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \iff \text{NON } (x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \iff \text{NON } (\exists i \in I \mid x \in A_i) \iff \forall i \in I, x \notin A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

Exercice 3 *Soit E un ensemble. A et B désignent deux parties de E. Montrer que*

$$(A \cap B = \emptyset) \iff (A \subset C_E(B)) \iff B \subset C_E(A)$$

Exercice 4 (Fonction indicatrice) *On considère un ensemble E. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'application* $\chi_A : \begin{cases} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{cases} \end{cases}$ *appelée* fonction indicatrice *de A. Démontrer que*

$$\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B \qquad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B \qquad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A$$

5.C Famille

Définition [Famille] Soit E et I deux ensembles. On appelle *famille d'éléments de E indexée sur I* une collection d'éléments de E dont chacun est indexé par un élément de I. Une telle famille est notée $(x_i)_{i \in I}$ où les x_i sont les éléments de E en question. I est appelé l'ensemble d'indexation. L'ensemble des familles d'éléments de E indexée sur I se note E^I.

Exemple Très souvent, I est une partie de $\mathbb{N}$ du type $[\![m, n]\!]$. On note peut alors noter la famille $(x_i)_{m \leqslant i \leqslant n}$. Une famille indexée sur $\mathbb{N}$ est tout simplement une suite. D'où les deux types de notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \geqslant 0}$. L'ensemble des suites réelles se note donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Attention ! Prendre garde à ne pas confondre la famille $(x_i)_{i \in I}$ et l'ensemble $\{x_i\}_{i \in I}$. Un ensemble est une collection *non ordonnée* d'objets. Par exemple, $\{1, 3, 5, 7\}$ et $\{3, 7, 1, 5\}$ représentent le même ensemble. Par contre, $(1, 3, 5, 7)$ et $(3, 7, 1, 5)$ représentent deux familles différentes. De plus, la description d'un ensemble par extension ne peut contenir qu'une seule fois le même élément ($\{4, 2, 1, 2\}$ ne décrit pas un ensemble). Au contraire une famille peut contenir plusieurs fois le même élément ($(4, 2, 1, 2)$ est bien une famille).

Définition [n-uplet] On appelle n-uplet une famille à n éléments (autrement dit qui peut être indexée sur $[\![1, n]\!]$). Un 2-uplet s'appelle aussi un *couple*, un 3-uplet un *triplet*, etc. . . .

5.D Produit cartésien

Définition [Produit cartésien] Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ n ensembles. On appelle *produit cartésien* des ensembles E_i, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, le produit cartésien se note E^n.

Exemple $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Remarque Dans une proposition avec quantificateurs,

- $\forall x \in E, \forall y \in F$ signifie la même chose que $\forall (x, y) \in E \times F$;
- $\exists x \in E, \exists y \in F$ signifie la même chose que $\exists (x, y) \in E \times F$

Lycée Arago Perpignan — MPSI
Exercices

Chapitre 1 Pour bien débuter

1 Quantificateurs

Exercice 1 *(*)* Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est l'application nulle.
2. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. f n'est pas la fonction nulle.
4. f est croissante sur $\mathbb{R}$
5. f est paire
6. f s'annule au-plus une fois sur $\mathbb{R}$.
7. La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2 *(*)* Compléter avec $\forall$ ou $\exists$ la proposition $\bullet x \in \mathbb{R} \bullet y \in \mathbb{R} x^2 = y$ de manière à la rendre exacte (deux réponses attendues)

2 Ensembles

— Pour montrer que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B on rédige de la manière suivante "Soit $x \in A$ ...(calculs et arguments)... Alors $x \in B$".
— Pour montrer que deux ensembles sont égaux on peut procéder par double inclusion.
— Pour montrer que deux fonctions sont égales sur E il suffit de montrer l'égalité pout tout élément de E

Exercice 3 *(*)*Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Exercice 4 *(*)*Montrer que $(A \cap B = A \cap C \ ET\ A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Exercice 5 *(*)*Soit E un ensemble. A et B désignent deux parties de E. Montrer que

$$A \cap B = \emptyset \iff A \subset \bar{B} \iff B \subset \bar{A}$$

Exercice 6 *(**)* Domaine de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Exercice 7 *(*)*Montrer que $\{z \in \mathbb{C}/|z-1| = |z+1|\} = \{z \in \mathbb{C}/\ Re(z) = 0\}$.

Exercice 8 *(**)* *Fonction indicatrice* On considère un ensemble E. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ qui à x associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$ appelée *fonction indicatrice* de A. Démontrer que

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$$

Exercice 9 *(*)* Démontrer les lois de De Morgan.

3 Logique et premières démonstrations

Exercice 10 *(*)*Soient P, Q et R trois propositions.
Montrer, avec un tableau de vérité, l'équivalence de $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et de $(P\ ET\ Q) \Rightarrow R$.

Exercice 11 *(*)* Soit $x \in \mathbb{R}$. « $x \geqslant 1$ » est-elle une condition *suffisante* de la proposition « $x^2 + x + 2 \geqslant 3$ » ? Même question avec *nécessaire*.

Exercice 12 *(*)*

1. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > x \mid y^2 > x^2$. Cette proposition est-elle vraie ? Et sa négation ?
2. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \geqslant 1$ ou $\ln(x) \leqslant 0$.

Exercice 13 *(*)*Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, par contraposée, que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Exercice 14 *(*)*Montrer, par contraposée, que pour tout nombre complexe z, $(\forall \varepsilon > 0, |z| < \varepsilon) \Rightarrow z = 0$.

Exercice 15 *(**)*En utilisant $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et une disjonction de cas montrer qu'il existe deux irrationnels x et y vérifiant x^y rationnel.

Exercice 16 *(**)*Objectif : Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

On procèdera par analyse synthèse.

Exercice 17 *(*)*Montrer que si x est irrationnel alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 18 *(**)*Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la négation de la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-2| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| \leqslant \varepsilon$$

4 Quelques calculs

Exercice 19 *(*)*Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x+2}{x^2-3x+2} \leqslant 1$.

Exercice 20 *(**)*Résoudre l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$.

Exercice 21 *(**)*Résoudre l'équation $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Exercice 22 *(**)*Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
on pourra multiplier par x cette équation en supposant que x est une solution

Exercice 23 *(*)*Résoudre l'équation $|x+1| = 4 - |3x-2|$.

Exercice 24 *(*)*Montrer que : $\forall x, y \geqslant 0$, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 25 *(***)*Montrer que pour tous $a, b > 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.

En déduire que pour tous $x, y, z > 0$, $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
on pourra remarquer que $2x = (x+y) + (x+z) - (y+z)$ par exemple

5 Récurrence

Exercice 26 *(*)* On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

Exercice 27 *(**)*Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ on a : $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

Exercice 28 *(*)*On pose $u_0 = 45$, $u_1 = -3$ et $u_{n+2} = 2u_n - 5u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par récurrence montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 29 *(*)*On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 30 *(**)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$.
Montrer que pour tout n entier naturel non nul on a : $(n-1)! \leqslant u_n \leqslant n!$.

Exercice 31 *(**)*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 7^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $P(n)$ la propriété u_n est un multiple de 6. Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 32 *(**)*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Montrer que pour tout n entier naturel non nul on a : $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 33 *(***)*Par récurrence forte et disjonction de cas montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

Lycée Arago Perpignan
Cours

MPSI

Chapitre 2 Bases du calcul algébrique

1 Quelques rappels utiles

1.A Inégalités

- ▷ Rappel sur les fractions...
- ▷ Si $c > 0$, $a \leqslant b \iff ca \leqslant cb$. Si $c < 0$, $a \leqslant b \iff ca \geqslant cb$.
- ▷ Si a et b sont *positifs*, alors $a = b \iff a^2 = b^2$.
- ▷ De manière générale, si f est *bijective*, alors $f(a) = f(b) \iff a = b$ (fonctions ln, exp, $\sqrt{\ }$, ...).
- ▷ Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, f est bijective de $[a,b]$ sur $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$.
- ▷ Si a et b sont *positifs*, alors $a \leqslant b \iff a^2 \leqslant b^2$.
- ▷ Si a et b sont *strictement positifs*, alors $a \leqslant b \iff \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
- ▷ De manière générale, si f est *strictement croissante*, alors $a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$ (fonctions ln, exp, $\sqrt{\ }$, ...). Si f est strictement décroissante, alors $a \leqslant b \iff f(b) \leqslant f(a)$.
- ▷ $|a| = b \iff a = b$ OU $a = -b$ (b doit être positif)
- ▷ $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$ (b doit être positif)
- ▷ $a = \sqrt{b} \iff \left(a^2 = b \text{ ET } a \geqslant 0\right)$ (b doit être positif)

1.B Puissances

Définition Soit x un nombre réel et n un entier relatif, on pose $x^0 = 1$, $x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{n\ fois}$ lorsque $n \geqslant 1$ et $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ lorsque $n < 0$.

Règles de calcul (si les expressions existent)

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n \qquad (x^n)^m = x^{n\times m} \qquad et \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

1.C Polynôme du second degrè

Racines, signes, graphes, ...

2 Le symbole somme : $\sum$

2.A Définition

Définition Soient I un ensemble fini et $(z_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. La somme des z_i, i parcourant l'ensemble I, est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} z_i$. Si I est vide la somme est nulle par convention.
Dans le cas où $I = [\![m,n]\!]$ où $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ sont tels que $m \leqslant n$, on la note plus souvent $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} z_k$ ou encore $\displaystyle\sum_{m\leqslant k\leqslant n} z_k$.
Elle vaut $z_m + z_{m+1} + \ldots + z_n$.
Dans le cas où $I = [\![m,n]\!] \times [\![p,q]\!]$ où $(m,n,p,q) \in \mathbb{Z}^4$ sont tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$, on la note plus souvent $\displaystyle\sum_{\substack{m \leqslant k \leqslant n \\ p \leqslant \ell \leqslant q}} z_{k\ell}$.

Proposition Linéarité

Remarque La quantité $\sum_{k=m}^{n} z_k$ ne dépend pas du symbole k. Cette somme est égale à $\sum_{i=m}^{n} z_i$ ou $\sum_{\ell=m}^{n} z_\ell$.
DONC quand vous calculez la somme $\sum_{k=m}^{n} z_k$, le résultat peut dépendre de m et n mais JAMAIS de k ! ! ! !

Exemple

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=1}^{n} 10 \qquad \sum_{k=0}^{n} n \qquad \frac{1}{n+1} - 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Remarque le nombre de termes dans $[\![m,n]\!]$ est $n-m+1$. Cela permet de calculer une somme dont l'expression de ne dépend pas de l'indice. ex...

2.A.1 Changements d'indice

Il s'agit d'une opération courante qui permet de transformer une somme afin, ensuite, de la calculer plus facilement. (C'est l'équivalent discret du théorème de changement de variable dans les intégrales)

Exemple

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell^2}$. Ici on a fait le changement d'indice $\ell = k+1$ ce qui revient à remplacer tous les k de la somme initiale par des $\ell - 1$. Mais il faut aussi **changer les bornes** ; quand k varie de 0 à n, ℓ varie de 1 à $n+1$.
2. $\sum_{j=2}^{9} \frac{j}{j+2} =$
3. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k+1}}{3^n} =$

2.B Sommes de références

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration La première avec le calcul de $2S$ et la seconde par récurrence

Théorème Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Plus généralement : pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$ avec $p \leqslant n$: $\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Démonstration On admet pour le moment la première et on démontre la seconde par changement d'indice.

Exemple Calculer $\sum_{k=2}^{n} 3^k + k + 4k^2 + nk$

2.C Simplifications téléscopiques

Outil indispensable pour des calculs de sommes !

Théorème Soit $(z_k)_{m\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{k=m}^{n}(z_{k+1}-z_k)=z_{n+1}-z_m$$

Démonstration Tous les termes se simplifient sauf les termes extrémaux : $\sum_{k=m}^{n}(z_{k+1}-z_k)=(z_{n+1}-z_n)+(z_n-z_{n-1})+(z_{n-1}-z_{n-2})+\ldots+(z_{m+2}-z_{m+1})+(z_{m+1}-z_m)=z_{n+1}-z_m$

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

Exemple $\sum(k+1)^2-k^2=....$ et on retrouve la formule de $\sum k$

Théorème *une formule à connaître par coeur* Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. $\displaystyle a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}$

En particulier

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3=a^3-(-b)^3=(a-(-b))(a^2-ab+b^2)$$

Démonstration Développons le membre de droite de la formule :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}=a\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}-b\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}b^{n-(k+1)}-\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}$$

En particulier pour $b=1$ on retrouve la formule pour calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

2.D Sommes doubles

Théorème Soit $(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}z_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}z_{ij}\quad\text{(somme sur tous les indices } (i,j) \text{ entre 1 et } n)$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}z_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}z_{ij}\quad\text{(somme sur tous les } (i,j) \text{ avec } i \text{ inférieur ou égal à } j)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}z_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}z_{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}z_{ij}\quad\text{(somme sur tous les } (i,j) \text{ avec } i \text{ strictement inférieur à } j)$$

Démonstration

- La famille $(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ peut être représentée sous forme d'un tableau où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne :

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

  La quantité $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} z_{ij}$ désigne la somme de tous ces termes. En calculant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ on calcule cette même somme en sommant ligne par ligne et en calculant $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}$ on somme colonne par colonne : on trouve donc le même résultat !
- Pour la deuxième serie d'égalités, on somme dans les trois expressions (dans la deuxième on procède par colonne et dans la dernière par ligne) les complexes suivants :

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & z_{nn} \end{pmatrix}$$

- De même pour la dernière serie d'égalités, sans les termes de la diagonale (exo)

Exemple $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant n} ij$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$

3 Le symbole produit : $\prod$

Définition Soient I un ensemble fini et $(z_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I.
Le produit des z_i, i parcourant l'ensemble I, est noté $\displaystyle\prod_{i\in I} z_i$.

Exemples $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k =$ $\qquad$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n =$

Proposition $\prod a_i b_i$, $\prod \lambda a_i$ et $\prod a$

Théorème (Simplifications télescopiques) Soit $(z_k)_{m\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de nombres complexes non nuls.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{z_{n+1}}{z_m}$$

Théorème **(Permutations)** Soit $(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes.

$$\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} z_{ij}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} z_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} z_{ij}$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} z_{ij}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} z_{ij}\qquad et \qquad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{ij}=\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} z_{ij}=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} z_{ij}$$

Exemple $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} (ij^2)=$

Attention ! Avec deux termes on a en général : $(a+b)(c+d)\neq ab+cd$ donc en général les symboles $\sum$ et $\prod$ ne peuvent pas être permutés. Exemple :

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1= \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} 1=$$

4 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Proposition

- Pour tous $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tels que $k\leqslant n$, on appelle *coefficient binomial k parmi n*, noté $\binom{n}{k}$, le nombre :

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- **Formule de Pascal** : pour $n\geqslant 1$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

Exemples et triangle de Pascal

Nous reverrons la formule suivante dans un cadre plus général, puis on l'appliquera à d'autres objets que des complexes. Il vous faut savoir dès à présent l'énoncé **et** la preuve de ce résultat.

Théorème **Formule du binôme de Newton**
Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(a,b)\in\mathbb{C}^2$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Démonstration Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ fixés. Raisonnons par récurrence sur n.

- **Initialisation :** $(a+b)^0=1=\binom{0}{0}a^0b^{0-0}=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}$

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}a^\ell b^{n-\ell}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}a^\ell b^{n-\ell+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}a^\ell b^{n-\ell+1} + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k'=1}^{n}\binom{n}{k'-1}a^{k'}b^{n-k'+1} + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}a^\ell b^{n-\ell+1} + b^{n+1} \quad \text{(changement d'indice } k'=k+1)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \quad \text{(formule de Pascal)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}. \text{ Fin de la récurrence.}
\end{aligned}$$

Exemples

— Cas $n = 3$, $n = 4$.

— Un exemple pour $n = 7$.

— Calcul de $\sum \binom{n}{k} 3^k + 1$

— Calcul de $\sum \binom{n}{k} 3^{2k}$

Exemple Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$. Calculer $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{n-k}\binom{n-k}{n-p}$.

Lycée Arago Perpignan MPSI
Cours

Chapitre 2 Bases du calcul algébrique

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n \qquad (x^n)^m = x^{n\times m} \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

Sommes

$$\sum_{k=m}^{n} x_k + y_k = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1,k\ pair}^{n} x_k + \sum_{k=1,k\ impair}^{n} x_k$$

Le nombre de termes dans $[\![m, n]\!]$ est $n - m + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases} \quad \textbf{Somme Geometrique}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

En particulier

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^2 - ab + b^2)$$

Produits

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} k = n! \qquad (n+1)! = (n+1) \times n! \quad 0! = 1$$

$$\prod_{k=n}^{m} \lambda a_k = \lambda^{m-n+1} \prod_{k=n}^{m} a_k$$

Coefficient binomial

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \{0, .., n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Formule de Pascal : pour $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Formule du binôme de Newton
Soient $n \in \mathbb{N}$ **et** $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Exercices

Chapitre 2 : Bases du calcul algébrique

1 Quelques Calculs

— **Les identités remarquables sont .... REMARQUABLES ! ! ! donc à remarquer !**

Exercice 34 *(*)* Simplifier $\dfrac{4^n}{(-2)^{2n+3}} + (3^n - 1)^2 - 9^n + 6^n$.

Exercice 35 *(**)*Résoudre les inéquations suivantes

(a) $2x \leqslant \sqrt{x^2+1}$ (b) $\sqrt{x^2-5x+4} < x-2$ (c) $\dfrac{3x+2}{x^2-3x+2} \leqslant \dfrac{3}{x-1}$ (d) $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$

2 Sommes

— **il faut connaître les sommes usuelles si on veut pouvoir les reconnaître**
— **on peut découper une somme en plusieurs parties : soit par linéarité soit au niveau des indices (en séparant les indices pairs et les indices impairs par exemple)**
— **Il faut absolument comprendre le principe de téléscopage et voir les simplifications lorsqu'il y en a. C'est un objectif majeur.**

Exercice 36 *(**)*Simplifier $\sum_{k=2}^{13} u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}$.

Exercice 37 *(*)*Soit $n \geqslant 2$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-3)^{k+1}$ puis $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \ln \frac{p^2}{(p-1)(p+1)}$.

Exercice 38 *(**)*Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{2^k}{5^{2k-1}} + 7k(k-1)$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.
on pourra ecrire $k = k+1-1$

Exercice 39 *(*)*Donner la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 40 *(**)* ***Principe de regroupements de termes***

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} min(k,n)$. On pourra séparer la somme en deux sommes.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$. On pourra séparer les indices pairs et impairs.

Exercice 41 *(**)*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en posant $j = k-1$.

Exercice 42 *(***)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.
En écrivant $z = (1+i)^{2n}$ sous sa forme trigonométrique donner les valeurs des sommes S_n et T_n.

Exercice 43 *(*)*Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ en posant $j = n-k$.

Exercice 44 *(**)*Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$.
Exprimer R_n en fonction de S_n, T_n et n.
Effectuer un changement d'indice dans la somme R_n pour en déduire la valeur de S_n.

Exercice 45 *(**)*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet}\sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{ij}$

Exercice 46 *(**)*Soit $n \geqslant 2$. Simplifier $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$ puis $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$ et enfin $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} max(i,j)$

3 Produits

— **Un seul produit usuel : $n!$. Par contre il faut savoir effectuer des simplifications avec des factoriels. Le premier exercice est absolument à comprendre et à réussir.**

Exercice 47 *(*)*Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ sans le symbole produit.

Exercice 48 *(*)*Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}$ sans récurrence.

Exercice 49 *(**)*Soit $n \geqslant 2$, à l'aide de factorisations, simplifier $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Exercice 50 *(**)*Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\prod_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$.

4 Formule du binôme

Exercice 51 *(**)*Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Développer $(a-b)^6$ et $(a^2+2b)^5$.

Exercice 52 *(**)*Soit $n \geqslant 1$, à l'aide de simplifications, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 53 *(***)*Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = (1+x)^n$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer de deux façons différentes la dérivée de f et $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour $x \geqslant 0$.

2. En déduire la valeur des sommes suivantes.

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \quad ; \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad ; \quad S_4 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}$$

3. (a) On admet que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n + 1 - 2^{n+1}$$

   Calculer

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j$$

   (b) En utilisant des idées similaires aux idées de la question 1) sur une fonction g à trouver montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n + 1 - 2^{n+1}$$

5 Pivot de Gauss

Exercice 54 Résoudre le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} 2y-z & = & 1 \\ -2x-4y+3z & = & -1 \\ x+y-3z & = & -6 \end{array}\right.$$

Exercice 55 Résoudre le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t & = & 10 \\ x-y+z+t & = & 6 \\ x+y-z+t & = & 4 \\ x+y+z-t & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 56 Résoudre le système suivant en fonction du complexe m.

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} (1-m)x+2y-z & = & 0 \\ -2x-(3+m)y+3z & = & 0 \\ x+y-(2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 57 Résoudre le système suivant en fonction des réels a, b, c

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z & = & a \\ -2x-3y+3z & = & b \\ x+y-2z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 58 Résoudre le système suivant en fonction du complexe t

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} (2+t)x+2y-z & = & 0 \\ 2x+(t-1)y+2z & = & 0 \\ -x+2y+(2+t)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Cours

Chapitre 3 : Trigonométrie circulaire

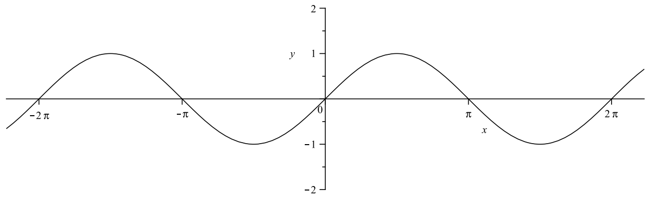
Rappelons que pour tous réels x, t, v, la relation $x \equiv t[v]$ se lit x *est congru à* t *modulo* v et signifie qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = t + kv$. On peut reécrire ceci sous la forme

$$x \in \{y + kv,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ou} \quad \text{encore} \quad x \in y + v\mathbb{Z}.$$

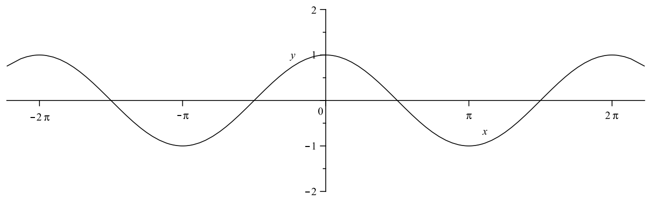
Ainsi, pour tout a réel, on note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{ka, k \in \mathbb{Z}\}$.

1 Les fonctions sinus, cosinus et tangente

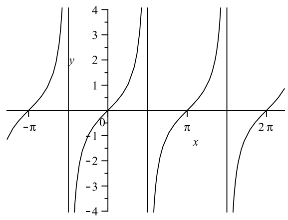
Proposition **[La fonction sinus] La fonction *sinus*, notée $\sin$ est une fonction continue, dérivable, 2π-périodique et impaire. Graphe**



Proposition **[La fonction cosinus] La fonction *cosinus*, notée $\cos$ est une fonction continue, dérivable, 2π-périodique et paire. Graphe**



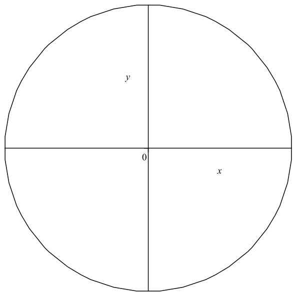
Proposition **[La fonction tangente] La fonction *tangente*, notée $\tan$, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.**
Elle est continue (sur son ensemble de définition), dérivable (sur son ensemble de définition), π-périodique et impaire. Graphe



Proposition **Sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on définit la fonction cotangente par $\cot = \frac{\cos}{\sin}$. Elle est donc continue (sur son ensemble de définition), dérivable (sur son ensemble de définition), π-périodique et impaire et sur $\mathbb{R}\backslash\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, on a $\cot = \frac{1}{\tan}$.**

Proposition **Sur les ensembles de définition des fonctions considérées, on a :**

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \qquad \cot' = 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}.$$



Proposition **[Calculs avec sin et cos]**

- **Résolution d'équations : pour tous x,y** $\in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \sin\ x = \sin\ y & \Longleftrightarrow \\ \cos\ x = \cos\ y & \Longleftrightarrow \end{cases}$
- **Translation : pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **:**

$$\sin(x+\pi) = \qquad \sin(\pi - x) = \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$\cos(x+\pi) = \qquad \cos(\pi - x) = \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

Inutile d'apprendre bêtement ces formules il faut être capable de les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

- **Formules d'addition : pour tous x,y** $\in \mathbb{R}$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

- **Formules de produit : pour tous x,y** $\in \mathbb{R}$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right) \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

- **Formules d'addition(bis) : pour tous x,y** $\in \mathbb{R}$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

- **Formules de duplication : pour tout x**$\in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Proposition **[Calculs avec tan] Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs** x **et** y **pour-lesquelles chaque terme est bien défini.**

- **Résolution d'équations :** $\tan\ x = \tan\ y \Longleftrightarrow$
- **Formules d'addition :**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

- **Formules de duplication :**

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Proposition **[Expression en fonction de $\tan\frac{x}{2}$] si on pose $t = \tan\frac{x}{2}$ (si chaque terme bien défini)**

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Démonstration

Proposition **On a les limites suivantes :**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$$

Démonstration

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$

Théorème **Soient a, b deux réels. Il existe deux réels ϕ, ψ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,**

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \phi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta - \psi).$$

Lemme **Pour tous réels x, y tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que**

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta.$$

Démonstration **[Démonstration du Lemme]**

On va raisonner par disjonction des cas selon les signes de x et de y.

- 1^{er} **cas : Si $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.**

- 2^{eme} **cas : Si $x \geqslant 0,\ y < 0$.**

- 3^{eme} **cas : Si $x < 0$.**

Finalement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que

$$x = \cos\theta,\ \ y = \sin\theta.$$

Démonstration **[Démonstration du Théorème]**

Exemple

1. $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta =$

2. $\cos\theta + \sin\theta =$

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Exercices

Chapitre 3 : Trigonométrie circulaire

1 Sans les formules

— **On peut utiliser les valeurs usuelles des fonctions trigonomètriques**
— **Pour prouver ou résoudre une inégalité ou une égalité on peut poser une fonction et en faire l'étude.**

Exercice 59 Résoudre $\cos x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 60 Montrer que $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 61 En dérivant une fonction montrer que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 62 Etudier les variations de $x \mapsto \tan(x) - x$ sur $[0; \pi/2[$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 63 Etudier les variations de $x \mapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$ sur $[0; 2\pi]$.

2 Avec les formules

Exercice 64 En remarquant que $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8}$, calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 65 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k} \sin\frac{3\pi}{2^k}$.

Exercice 66
1. Résoudre $\cos(3x) = \sin(2x)$ (E).
2. Trouver a, b, c réels tels que $(E) \Longleftrightarrow \cos(x)\left(a\sin^2(x) + b\sin(x) + c\right) = 0$
3. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 67 Résoudre les équations suivantes :
1. $\cos x + \sin x = 1$
2. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
3. $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$
4. $\tan(x)\tan(2x) = 1$
5. $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$
6. $\tan(2x) = 3\tan(x)$
7. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$
8. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

3 Un petit problème

Exercice 68 On se donne un entier impair n supérieur ou égal à 3.

1. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ pour lequel $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
2. On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $p_0 = p_1 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $p_{k+2} = 2p_{k+1} - np_k$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $cos(k\theta) = \frac{p_k}{\sqrt{n}^k}$.

   Indication : pour tous x,y $\in \mathbb{R}$ *on a* $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(...)$

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k est un entier relatif non divisible par n.
3. On suppose $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel. Comme $\theta \neq 0$, il existe des entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $\theta = \frac{a\pi}{b}$.
   Calculer $\cos(2b\theta)$ et obtenir une contradiction.

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Cours

Chapitre 4 : Nombres complexes

1 Le corps des nombres complexes

1.A Construction à partir des nombres réels

Connaissant l'ensemble des nombres réels, muni des opérations addition + et multiplication ·, nous allons construire le corps des nombres complexes.
Rappelons que $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de nombres réels, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Définition [Nombre complexe] Un nombre complexe est un couple de réels. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Soient $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ deux nombres complexes. On dit que $x = y$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
On définit l'addition + et la multiplication · de deux nombres complexes par

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c, b + d), \\ x \cdot y &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Remarque On a $x \cdot y = y \cdot x$.

Proposition En notant $i = (0, 1)$, on a $i^2 = (-1, 0)$.

Démonstration : on a $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on identifie le couple $(x, 0)$ au réel x et nous noterons désormais x le complexe $(x, 0)$. Ainsi on a identifié $\mathbb{R}$ à la sous-partie de $\mathbb{C}$ définie par $\{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$. Vérifions que les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec celles que l'on a définies sur $\mathbb{C}$.
Soient a, b deux nombres réels. En utilisant les définitions de l'addition et de la multiplication, on a

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0), \end{aligned}$$

Avec ces notations, on a $i^2 = -1$.

Nous pouvons constater que l'on a étendu les opérations connues sur $\mathbb{R}$ à un ensemble plus grand qui contient d'une certaine manière $\mathbb{R}$.

Remarque Pour $b \in \mathbb{R}$, grâce aux notations précédentes, ib et $(0, b)$ désignent le même nombre complexe car $ib = (0, 1) \cdot (b, 0) = (0 \times b - 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times b) = (0, b)$.

Théorème [Forme algébrique] Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre complexe. Le réel a est appelé partie réelle de z que l'on note $Re(z)$ et le réel b est appelé partie imaginaire de z, que l'on note $Im(z)$.

Démonstration **Existence :** Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'on ait : $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$.
Unicité : Si $a + ib = a' + ib'$, alors on a $(a, b) = (a', b')$ et donc $a = a'$ et $b = b'$.

Remarque Pour tous réels a, b, a' et b', on a $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. Autrement dit, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles ET leurs

parties imaginaires sont égales.
Un nombre complexe de partie imaginaire nulle est un réel et un complexe de partie réelle nulle est un imaginaire pur.

Remarque **Structure de corps : on dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $.$ est un corps car il vérifie les propriétés suivantes : pour tous z, z', z'' de $\mathbb{C}$**

1. **Commutativité de $+$: $z + z' = z' + z$**
2. **Commutativité de $.$: $z.z' = z'.z$**
3. **Associativité de $+$: $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$**
4. **Associativité de $.$: $(z.z').z'' = z.(z'.z'')$**
5. **Disributivité de $.$ sur $+$: $z.(z' + z'') = z.z' + z.z''$**
6. **Existence d'un élément neutre pour $+$: cet élément neutre unique est 0, $z + 0 = 0 + z = z$**
7. **Existence d'un élément neutre pour $.$: cet élément neutre unique est 1, $z.1 = 1.z = z$**
8. **Existence d'un inverse pour $+$: tout nombre complexe z possède un inverse unique pour $+$ qui est $-1.z$ noté $-z$ (opposé de z), on a $z + (-z) = (-z) + z = 0$**
9. **Existence d'un inverse pour $.$: tout nombre complexe $z = x+iy$ non nul possède un inverse unique pour $.$ qui est $\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$ noté $1/z$, on a $z.(1/z) = (1/z).z = 1$.**

1.B Le plan complexe

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

<u>Définition</u> [Affixe] Soit M un point du plan de coordonnées (a, b). On appelle affixe du point M le nombre complexe $z = a + ib$.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le point de coordonnées (a, b) est appelé l'image du nombre complexe z.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (a, b). On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $u = a + ib$.

Remarque **Les points d'affixe réelle sont sur l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$, qui est l'axe réel, ceux d'affixe imaginaire pure sont sur l'axe $(O, \overrightarrow{e_2})$, qui est l'axe imaginaire**

<u>Théorème</u>

1. **Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectifs u, v. Pour tous réels λ, μ, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.**
2. **Soient A, B deux points du plan d'affixes respectifs a, b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b - a)$.**
3. **Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan d'affixes respectifs $a_1, \ldots, a_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Alors, le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ a pour affixe $\dfrac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$.**

Démonstration **1) on travaille sur les coordonnées 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ 3) Soit G le bary, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \Lambda \overrightarrow{OG}$.**

1.C Conjugué

Définition [conjugué] Soient a, b deux réels, $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
Le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé conjugué de z.
Nous avons donc $Re(\bar{z}) = Re(z)$ et $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

Géométriquement le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point M d'affixe z par rapport à l'axe (Ox).

Proposition Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On a

1. $\overline{(\overline{z})} = z$.
2. $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
3. z est réel (z est dans $\mathbb{R}$) si et seulement si $z = \overline{z}$.
4. z est imaginaire pur (z est dans $i\mathbb{R}$) si et seulement si $z = -\overline{z}$.
5. $z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$. De plus, $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Démonstration Seule la propriété (v) mérite que l'on s'y attarde. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $z = a + bi$, d'après la défintion de la multiplication et du conjugué $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. Ainsi, $z\overline{z} \geqslant 0$. De plus, $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$, c'est-à -dire si et seulement si $z = 0$.

Proposition [Conjugué et Opérations]Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
3. $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$.

Démonstration On note sous forme algébrique $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac + iad + ibc - bd} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

1.D Module

Définition [Module]Pour tout nombre complexe z, on appelle module de z, noté $|z|$, la quantité $\sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque

1. Le module est bien défini car $z\overline{z}$ est un réel positif.
2. Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Proposition [Interprétations géométriques]
Soit M un point du plan d'affixe z. La distance OM du point M à l'origine est égale au module $|z|$.
Soient A d'affixe a et B d'affixe b. La distance AB est égale au module $|b - a|$.

Démonstration Si $z = a + ib$, alors M a pour coordonnées (a, b) et donc on a $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Proposition Soit z un nombre complexe. On a

1. Si $z = a + ib$ avec a et b réels, alors on a $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. $|\overline{z}| = |z|$.
4. $|Re(z)| \leqslant |z|$ et $|Im(z)| \leqslant |z|$.
5. Si z est non nul, on a
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$
En particulier si $z = a + ib \neq 0$ pour a et b réels, on a
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Démonstration Contentons- nous de la preuve du quatrième point :
$$|Re(z)| = \sqrt{Re(z)^2} \leqslant \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \leqslant \sqrt{|z|^2} \leqslant |z|.$$
On raisonne de manière analogue pour la partie imaginaire.

Corollaire Soient z_1, z_2 deux nombres complexes, z_2 non nul. On a
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Démonstration
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)} = \frac{\overline{z_1\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \frac{\overline{z_1}z_2}{|z_2|^2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Proposition [Module et Opérations]Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

1. Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
2. Inégalité triangulaire inverse : $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_1^n| = |z_1|^n$.
4. Si on a $z_2 \neq 0$, alors on a $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) \\
&\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| \\
&\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| \\
&\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 .
\end{aligned}$$
De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire,
$$\begin{aligned}
|z_1| &= |z_1 - z_2 + z_2| \\
&\leqslant |z_1 - z_2| + |z_2| \\
|z_1| - |z_2| &\leqslant |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

L'autre inégalité se démontre en effectuant la même opération avec z_2.
Ensuite $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2} = |z_1||z_2|$, **car les nombres** $|z_1|$ **et** $|z_2|$ **sont positifs.**

Enfin $|z_1/z_2| = \sqrt{(z_1/z_2)\overline{(z_1/z_2)}} = \sqrt{(z_1/z_2)(\overline{z_1}/\overline{z_2})} = \sqrt{|z_1|^2/|z_2|^2} = |z_1|/|z_2|$.

<u>Attention</u> ! **il n'y a pas d'ordre pour les nombres complexes. Par exemple** $1 \leqslant i$ **ou** $1 \geqslant i$ **n'ont aucun sens.**

Remarque **Grâce** *à* **l'interprétation géométrique du module, on peut immédiatement prouver l'inégalité triangulaire** $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ **(dessin).**

<u>Définition</u> [Cercles & Disques] Soit A un point du plan d'affixe a et r un nombre réel strictement positif.

1. **Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points d'affixes**
$$\{z \in \mathbb{C} / |z - a| = r\}.$$
2. **Le disque fermé de centre A et de rayon r est l'ensemble des points d'affixes**
$$\{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leqslant r\}.$$
3. **Le disque ouvert de centre A et de rayon r est l'ensemble des points d'affixes**
$$\{z \in \mathbb{C} / |z - a| < r\}.$$

2 Le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

2.A Définition et Propriétés

<u>Définition</u> [Nombres complexes de module 1] On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire,
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}.$$

Remarque **Ainsi** $\mathbb{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 = 1\}$ **(cercle unité !)**

Remarque $(\mathbb{U}, \times)$ **est un groupe :**

1. **pour tous z_1, z_2 de $\mathbb{U}$ on a $z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$ (loi de composition interne)**
2. **La loi $\times$ est associative**
3. **La loi $\times$ possède un élément neutre dans $\mathbb{U}$**
4. **Chaque élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$ pour la loi $\times$.**

<u>Proposition</u> On a z dans $\mathbb{U}$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$. En effet on a les équivalences $1 = |z| \Leftrightarrow 1 = |z|^2 = z\overline{z}$.

<u>Définition</u> [Exponentielle] Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle de $i\theta$, notée $e^{i\theta}$ le nombre complexe
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Exemple On a $e^{i\pi} =$ $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $\quad e^{i\frac{\pi}{4}} =$.

Théorème Soit z un nombre complexe. z est dans $\mathbb{U}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Démonstration On démontre cette propriété par double implication.

($\Leftarrow$). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. D'après la définition du module et les propriétés élémentaires sur le sinus et cosinus,

$$|z|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Ainsi, $z \in \mathbb{U}$.

($\Rightarrow$) Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après la définition du groupe des nombres complexes de module 1, $Re(u)^2 + Im(u)^2 = 1$. En utilisant un résultat précédent (chapitre 1) il existe un nombre réel θ (unique modulo 2π) tel que $\cos\theta = Re(u)$ et $\sin\theta = Im(u)$. On a alors $z = e^{i\theta}$.

Proposition Soient $n \in \mathbb{N}$, θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = Re(e^{i\theta})$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = Im(e^{i\theta})$.
2. $e^{i\theta} \neq 0$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$.
3. Morphisme : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
4. Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
5. Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ (c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$).

Démonstration Le (i) est une conséquence des propriétés $2Re(z) = z + \bar{z}$ et $2iIm(z) = z - \bar{z}$.
Les (ii) est une conséquence de $|e^{i\theta}| = 1$.
Le (iii) est une conséquence des formules d'addition des fonctions cosinus et sinus.
Le (iv) se démontre par récurrence.

2.B Linéarisation et factorisation

Les formules d'Euler et de Moivre combinées au binôme de Newton servent à linéariser les fonctions cosinus et sinus, c'est-à-dire à exprimer $\cos^n x \sin^m x$ en fonction des $\cos(kx), \sin(kx)$. Observons comment cela fonctionne.

Exemple

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3 x$
2. On peut effectuer l'opération inverse. Par exemple, exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.
3. Montrons que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \frac{\pi}{8}$.

2.C Forme trigonométrique

Pour tout nombre complexe non nul z, le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, ce qui s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$.

Définition [Argument, Forme trigonométrique] Soit z un nombre complexe non nul.
Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé un argument de z.
L'unique réel $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé l'argument principal de z. On le note $\arg(z)$.
Le nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Théorème Soient z_1, z_2 deux nombres complexes non nuls.

1. $\arg(\bar{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$.
2. $\arg(-z_1) \equiv \arg(z_1) + \pi[2\pi]$.
3. $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$.
4. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$.
5. $\arg(z_1^n) \equiv n\arg(z_1)[2\pi]$.

Démonstration Ces propriétés sont des conséquences des propriétés de l'exponentielle.

Exemple Déterminer l'argument de $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$.

Méthode Caractérisation des réels et des imaginaires purs par l'argument Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
- z est réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

2.D Interprétation géométrique de l'argument

Interprétation géométrique de l'argument Dessin

Si z est un nombre complexe non nul d'image le point M, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul d'affixe z, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.

Proposition Soient A et B deux points distincts d'affixes respectifs a et b. Alors $\arg(b-a)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$.

Théorème Soient A, B, M trois points du plan d'affixes respectives a, b, z tels que l'on ait $M \neq A$ et $M \neq B$. Alors,

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi].$$

Démonstration

Corollaire Soient A, B, M trois points du plan deux à deux disctincts d'affixes respectives a, b, z.

1. Les points A, B, M sont alignés si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$.
2. Les droites (AM) et (BM) sont orthogonales si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration

Exemple Le demi-cercle strictement supérieur centré en 0 et de diamètre 2 est caractérisé par $\left\{z \in \mathbb{C}/\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}_+^*\right\}$. En effet ce demi-cercle est caractérisé par l'ensemble des points M du plan vérifiant...

2.E L'exponentielle complexe

Définition **[Exponentielle complexe] Soit $z \in \mathbb{C}$ qui s'écrit sous forme algébrique $z = x + iy$. On appelle exponentielle de z, notée e^z, le nombre complexe $e^x \cdot e^{iy}$.**

Proposition

1. **L'exponentielle est $2\pi i$-périodique, c'est-à-dire, pour tout $z \in \mathbb{C}$,**
$$e^z = e^{z+2\pi i}.$$
2. **Équation fonctionnelle : $\forall z,\, z' \in \mathbb{C}$,**
$$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}.$$
3. **Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$.**

Démonstration **Le (i) est une conséquence de la 2π-périodicité des fonctions sinus et cosinus.**
Le (ii) est une conséquence de la propriété de l'exponentielle complexe et des puissances des nombres réels.
Le (iii) est une conséquence de $|e^z| = e^x$ et de la positivité de l'exponentielle réelle.

Exemple $e^{3+i\pi/2} = e^3 i$

3 Racines d'un nombre complexe

3.A Racines carrées

Définition **[Racine carrée] Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée du nombre complexe z tout nombre complexe ζ tel que**
$$\zeta^2 = z.$$

Proposition **Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.**

Démonstration

— **Méthode trigonométrique. Soit z un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Un nombre complexe $\zeta = \rho e^{i\phi}$ (avec $\rho \geqslant 0$) est une racine carrée de z si et seulement si**
$$\rho^2 e^{i2\phi} = re^{i\theta},$$
ce qui équivaut à $\rho^2 = r$ et $\phi \equiv \dfrac{\theta}{2} \mod \pi$. Finalement, z admet deux racines carrées opposées,
$$\sqrt{r}e^{i(\dfrac{\theta}{2}+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\dfrac{\theta}{2}},\ \sqrt{r}e^{i\dfrac{\theta}{2}}.$$

— **Méthode algébrique. Notons sous forme algébrique $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. et $\zeta = \alpha + i\beta$. Comme $\zeta^2 = z$, on obtient**
$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= a, \\ 2\alpha\beta &= b, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= |z| = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la première et la dernière relation permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 &= \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \end{aligned}$$

et la deuxième équation permet de déterminer le signe du produit $\alpha\beta$.

Exemple Rechercher les racines carrées complexes du nombre complexe $1+i$ en utilisant les deux méthodes. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.

<u>Théorème</u> [Équations du second degré] Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2+bz+c=0.$$

On note $\Delta = b^2-4ac$ le *discriminant* de cette équation, δ une racine carrée de Δ. Cette équation admet

- **deux solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ si Δ est non nul.**
- **Une solution double $\frac{-b}{2a}$ si Δ est nul.**

La somme de ces solutions vaut $-\frac{b}{a}$, leur produit vaut $\frac{c}{a}$

Démonstration Tout marche comme dans le cadre réel. Il est toutefois recommandé de se rappeler la démonstration qui tient en quelques lignes.

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\delta}{2a})^2\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a})\cdot(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a})\right). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant qu'un produit de nombres complexes est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Exemple Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(2i+3)z+1-i=0$. On calcule le discriminant Δ.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2i+3)^2-4\cdot(1-i) \\ &= -4+9+12i-4+4i \\ &= 1+16i. \end{aligned}$$

Si $\delta=\alpha+i\beta$ est une racine de Δ,

$$\begin{aligned} \alpha^2-\beta^2 &= 1, \\ \alpha\beta &= 8, \\ \alpha^2+\beta^2 &= \sqrt{257}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'une racine du discriminant Δ est donnée par le nombre complexe

$$\delta=\sqrt{\frac{1+\sqrt{257}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{257}-1}{2}}.$$

On en déduit les deux racines de l'équation,

$$-i-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{257}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{257}-1}{2}}\right).$$

3.B Racines n-ièmes

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Définition [Racine n-ièmes de l'unité] Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition On a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les nombres complexes $e^{i\dfrac{2k\pi}{n}}$, k décrivant l'ensemble $\{0,\dots,n-1\}$.

Démonstration Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On pose $\rho=|z|$ et ϕ l'unique argument de z dans $[0;2\pi[$. Alors

$$z^n=1\iff\rho^n e^{n\phi}=1\iff\rho^n=1\quad et\quad n\phi\equiv 0\ mod\ 2\pi$$

Or $\rho\in\mathbb{R}^+$ donc $\rho^n=1\iff\rho=1$ donc

$$z^n=1\iff\rho=1\quad et\quad\exists k\in\mathbb{Z}/\phi=2k\pi/n\iff\rho=1\quad et\quad\exists k\in\{0,...,n-1\}/\phi=2k\pi/n$$

On a pu remplacer $\mathbb{Z}$ car $\phi\in[0;2\pi[$. Cela nous fait bien n racines car les exponentielles sont toutes différentes.

Exemple On a $\mathbb{U}_2=\{1;-1\}$ et $\mathbb{U}_4=\{1;-1;i;-i\}$.

Exemple Les racines 3-ièmes de l'unité sont traditionnellement notées $(1,j,j^2)$ et sont données par

$$1,\ j=e^{\dfrac{2i\pi}{3}},\ j^2=e^{\dfrac{4i\pi}{3}}.$$

Remarque

1. **Les images des racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier à n côtés.**
2. **Si on note $\zeta=e^{i\dfrac{2\pi}{n}}$, on a alors $\mathbb{U}_n=\{1,\zeta,\zeta^2,...,\zeta^{n-1}\}$.**

Théorème Soit $n\in\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle : $\displaystyle\sum_{w\in\mathbb{U}_n}w=\sum_{k=0}^{n-1}e^{2ik\pi/n}=0$. En particulier $1+j+j^2=0$.
(géométriquement c'est l'affixe de l'isobarycentre des sommets du polygone régulier)

Démonstration $e^{2i\pi/n}\neq 1$ car $n\neq 1$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{2ik\pi/n}=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{2i\pi/n}}=0$$

Définition **[Racine n-ièmes] Étant donné un nombre complexe z, on appelle racine n-ième de z tout nombre complexe ζ tel que**

$$\zeta^n = z.$$

Proposition **Étant donné un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$, il possède n racines n-ièmes données par**

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n})}, \; k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Démonstration **Posons $w = \sqrt[n]{r}e^{i\dfrac{\theta}{n}}$ on a $w^n = z$ et w non nul car z non nul alors**

$$\zeta^n = z \Longleftrightarrow \zeta^n = w^n \Longleftrightarrow \left(\frac{\zeta}{w}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \exists k \in \{0;...;n-1\}/ \; \zeta = we^{2ik\pi/n}$$

Exemple **Calculons les racines cubiques de $1+i$.**

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Cours

Chapitre 4 : Nombres complexes

Proposition Soient a, b deux réels, $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
- Le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé conjugué de z. Géométriquement le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point M d'affixe z par rapport à l'axe (Ox).
- $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ désigne le module de z. Cela représente la distance OM avec O le point d'affixe nulle.
- Soient A d'affixe z_A et B d'affixe z_B. La distance AB est égale au module $|z_B - z_A|$.
- Inégalité triangulaire : soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Définition [Nombres complexes de module 1] On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire,

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}.$$

Proposition On a z dans $\mathbb{U}$ si et seulement si $z^{-1} = \overline{z}$.

Définition [Exponentielle] Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle exponentielle de $i\theta$, notée $e^{i\theta}$ le nombre complexe

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Théorème Soit z un nombre complexe. z est dans $\mathbb{U}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Proposition Soient $n \in \mathbb{N}$, θ, $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = Re(e^{i\theta})$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = Im(e^{i\theta})$.
2. $e^{i\theta} \neq 0$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$.
3. Morphisme : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
4. Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Définition [Argument, Forme trigonométrique] Soit z un nombre complexe non nul.
Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé un argument de z.
L'unique réel $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé l'argument principal de z. On le note $\arg(z)$.
Le nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Théorème **Soient z, z_1, z_2 trois nombres complexes non nuls.**

1. $\arg(\bar{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$.
2. $\arg(-z_1) \equiv \arg(z_1) + \pi[2\pi]$.
3. $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$.
4. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$.
5. $\arg(z_1^n) \equiv n\arg(z_1)[2\pi]$.
6. **z est réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$.**
7. **z est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.**
8. **Si z est d'image le point M, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.**
9. **Soient A, B, M trois points du plan d'affixes respectives a, b, z tels que l'on ait $M \neq A$ et $M \neq B$. Alors,**
$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi].$$

Théorème **[Équations du second degré] Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. On considère l'équation**
$$az^2 + bz + c = 0.$$
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de cette équation, δ une racine carrée de Δ. Cette équation admet

— **deux solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$ si Δ est non nul.**

— **une solution double $\frac{-b}{2a}$ si Δ est nul.**

La somme de ces solutions vaut $-\frac{b}{a}$, leur produit vaut $\frac{c}{a}$

Définition **[Racine n-ièmes de l'unité] Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.**

Proposition **Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.**

— **On a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, k décrivant l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$.**

— **La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle : $\sum_{w \in \mathbb{U}_n} w = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0$.**

— **$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$. On a $1 + j + j^2 = 0$.**

Proposition

1. **Soit z_0 un nombre complexe. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe z_0. L'application qui à un point M du plan d'affixe z associe le point du plan M' d'affixe $z + z_0$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.**
2. **Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ et z_0 un nombre complexe. Soit M_0 le point d'affixe z_0. L'application qui à un point M du plan d'affixe z associe le point du plan M' d'affixe z' tel que $z' - z_0 = \lambda(z - z_0)$ ou $z' = \lambda(z - z_0) + z_0$ est l'homothétie de centre M_0 et de rapport λ.**
3. **Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit M_0 le point d'affixe z_0. L'application qui à un point M du plan d'affixe z associe le point du plan M' d'affixe z' tel que $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$ ou $z' = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ est la rotation d'angle θ de centre M_0**
4. **Soit $a \neq 1$. L'application $z \mapsto az + b$ est une similitude directe : composée commutative d'une rotation d'angle $arg(a)$ et d'une homothétie de rapport $|a|$ de centre Ω d'affixe ω vérifiant $a\omega + b = \omega$.**

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Exercices

Chapitre 4 : Nombres complexes

1 Quelques calculs (élémentaires ?)

- **Il y a deux formes aves lesquelles on travaille : la forme algébrique $a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et la forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r\in\mathbb{R}^+$ et $\theta\in\mathbb{R}$.**
- **La forme trigonométrique est bien plus facile à manipuler.**
- **Si il y a un module on peut se servir de $|z| = z\bar{z}$.**
- **Lorsqu'on parle de complexe de module 1 on peut en considérer une écriture de la forme $e^{i\theta}$.**
- **Pour montrer qu'un complexe est réel on peut montrer que $z=\bar{z}$.**

Exercice 69 *(*)*Soit $z\in\mathbb{C}$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z+i\bar{z}$ en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

Exercice 70 *(*)*Simplifier sous la forme trigonométrique les nombres : $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$, $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$.

Exercice 71 *(*)*Soient $u,v\in\mathbb{C}$, montrer l'égalité $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.

Exercice 72 *(**)*Soient z et z deux complexes non nuls. Montrer que $|z+z'|=|z|+|z'|$ si et seulement si $Arg(z)=Arg(z')$.

Exercice 73 *(***)*Montrer que : $\forall u\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\left[\forall z\in\mathbb{C}, \dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\right]\Leftrightarrow |u|=1$

Exercice 74 *(**)*Montrer que l'application $f : z\mapsto -z\dfrac{1-\bar{z}}{1-z}$ est une involution de $D=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ (c-à-d montrer que l'image d'un point de D appartient à D et montrer que la composée de f par f est égale à l'application identité sur D)

Exercice 75 *(*)*Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C}, \dfrac{\bar{z}-iz}{i-1}\in\mathbb{R}$

Exercice 76 *(*)*Donner la forme trigonométrique de $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ et de $1+\sqrt{3}i$ et en déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 77 *(**)*On introduit les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :

$$U=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=1\}=\{e^{i\theta}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}\},\ P=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ Im(z)>0\},\ D=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|<1\}.$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ par $h(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$.
   (a) Montrer que pour tout $z\in U\setminus\{1\}$, $h(z)\in\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $z\in D$, $h(z)\in P$.
   (c) Déterminer les complexes z tels que $h(z)=z$.
2. Soit g la fonction définie par $g(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.
   (a) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{R}$, $g(z)\in U$.
   (b) Montrer que pour tout $z\in P$, $g(z)\in D$.

2 Equations. Racines carrées.

- **Avec une équation avec des complexes ne pas se précipiter sur la forme algébrique $a+ib$**
- **Lorque l'on a un équation on peut en étudier la partie réelle et la partie imaginaire pour former de nouvelles équations.**
- **Si on a une équation de degrè 2 il y a une méthode simple !**
- **De nouveau la forme trigonométrique est assez simple à utiliser.**
-

Exercice 78 *(*)*Résoudre $z^2+(2-2i)z+3-2i=0$.

Exercice 79 *(*)*Donner les racines carrées de $-7i$ puis de $2+i$.

Exercice 80 (**) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $|z|-z=1+2i$
2. $\bar{z}=z^7$
3. $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$
4. $2z^2-(9i+1)z-7+11i=0$

Exercice 81 (***) Résoudre $z^6-2(cos\theta)z^3+1=0$ avec $\theta\in]0;\pi[$.
En déduire une factorisation de ce polynôme en produit de trinômes à coefficients réels.

Exercice 82 *(*)*Soit $P(z)=z^3-(4+3i)z^2+(4+12i)z+8-6i$. En trouvant une racine imaginaire pure de P déterminer toutes les racines complexes de P.

Exercice 83 *(*)*Résoudre le système $x+y=1+i$, $xy=13i$.

Exercice 84 *(*)*On cherche à résoudre l'équation $z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=0$ sachant qu'elle possède une racine réelle notée x.

1. Montrer que le réel x vérifie les équations
$$x^3-x^2-x-2=0 \text{ et } -2x^2+9x-10=0.$$
2. En déduire la valeur de x et conclure en déterminant toutes les solutions de l'équation $z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=0$.

Exercice 85 *(*)*Résoudre $e^{2z}-2e^z+2=0$

Exercice 86 *(**)*Soit $a\in\mathbb{R}$. Trouver les couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} cos(a)+cos(a+x)+cos(a+y)=0\\ sin(a)+sin(a+x)+sin(a+y)=0\end{cases}$$

3 Racines n-ièmes

- **Dès qu'il y a une puissance un peu grande on doit penser aux racines n-ièmes.**
- **De nouveau la forme trigonomètrique est la plus simple à utiliser.**
- **Si on a une somme on peut parfois utiliser le fait que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.**
- **Si on a un cosinus on peut penser que c'est la partie réelle d'un complexe. idem avec sinus et partie imaginaire.**

Exercice 87 *(*)*Calculer les racines cubiques de a $=1-j$ puis de b $=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ puis les racines quatrièmes de $c=28-96i$.

Exercice 88 *(**)*Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

1. Résoudre (E) en donnant les solutions sous forme simplifiées.
2. Montrer que : $(E) \iff P(z) = 0$ où P est un polynôme à coefficients réels dont on déterminera les coefficients. Déterminer les racines de P et en déduire $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$, où $(p,q,n) \in \mathbb{Z}^3$.

Exercice 89 *(*)*Résoudre $(\sqrt{3}+3i)z^n = -6$.

Exercice 90 *(**)*Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) + 1 = 0$

Exercice 91 Soit $\omega = e^{i2\pi/5}$.

1. En sachant que $1+\omega+...+\omega^4 = 0$ et en posant $z = \omega+\omega^{-1}$, donner une équation du second degrè vérifiée par z.
2. Déterminer alors l'expression de $\cos 2\frac{\pi}{5}$ et $\sin 2\frac{\pi}{5}$.

Exercice 92
1. Résoudre l'équation $z^5+1=0$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
2. Déterminer un polynôme Q telle que $z^5+1 = (z+1)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. En posant $X = z + \frac{1}{z}$ résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
4. Déterminer enfin l'expression de $\cos\frac{\pi}{5}$ sous la forme $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ avec a,b,c,d entiers relatifs.

Exercice 93 *(**)*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Cacluler $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 94 *(**)* Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $w = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k-1|^2$ en fonction de n.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k-1|$ en fonction de n.
5. (***) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (z+w^k)^n$ en utilisant la formule du binôme et une somme double.

4 Linéarisation. Angle moitié.

- **Si on a un cosinus on peut penser que c'est la partie réelle d'un complexe. idem avec sinus et partie imaginaire.**
- **Pour linéariser on utilise Euler et le binôme.**
- **Pour factoriser une expression trigonométrique on utilise partie réelle et partie imaginaire puis la formule de Moivre en général.**

Exercice 95 *(*)*Donner la factorisation de $\cos p + \cos q$ à l'aide des nombres complexes.

Exercice 96 *(*)*Linéariser $\cos^5 x$.
Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 97 *(*)*Factoriser $\sin(2x) - \sin(4x)$ à l'aide des complexes.

Exercice 98 *(*)*Soit a $\in \mathbb{R}$. Mettre z sous forme trigonométrique : $z = \cos a + i \sin a + j$ avec $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 99 *(*)*Soit x un nombre réel.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire que $\cos(\pi/10) = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
2. Linéariser $\cos^3 x$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$. Avez-vous une autre méthode ?

Exercice 100 *(**)*Soit α un réel telle que $\tan(\alpha)$ existe. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{sin2x + sin3x + sin4x}{cos2x + cos3x + cos4x} = tan\ \alpha$

Exercice 101 *(**)*Soit $f(z) = |z^3 - z + 2|$ avec $z \in \mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. En utilisant la formule liant module et conjugué, exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ en fonction de $\cos\theta$.
3. Soit $g(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$. Etudier les variations de g.
4. En déduire le maximum de la fonction f pour $z \in \mathbb{U}$.

5 Un zeste de géométrie

- **Un module représente une distance** $AB = |z_B - z_A|$**.**
- **Un argument représente un angle** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\dfrac{d-c}{b-a}$**.**
- **Un angle droit se traduit par un argument de** $\pi/2$ **et donc à un complexe qui est un imaginaire pur.**
- **Des points alignés se traduisent par un argument nul et donc à un complexe qui est un réel.**

Exercice 102 *(*)*Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|.$$

Exercice 103 *(**)*Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que

1. $z + \bar{z} = |z|$.
2. 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
3. z, z^2 zt z^3 soient les affixes des sommets d'un triangle rectangle.
4. z et $1/z$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.

Exercice 104 *(**)* Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + jb + j^2c = 0$.

Exercice 105 *(*)* Soit $z \in \mathbb{C}/\{2i\}$. On pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $|f(z)| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $arg(f(z)) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 106 *(*)*

1. Caractériser géométriquement l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto (2+2i)z - (7+4i)$.

2. Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r.
3. Soit r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.
4. Caractériser géométriquement l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto \bar{z}+i$.

Exercice 107 *(**)*Soit f la similitude de centre d'affixe $2-3i$, d'angle $\pi/4$ et de rapport $3\sqrt{2}$.

1. Si M est un point d'affixe z, déterminer l'affixe z' de $f(M)$.
2. Déterminer l'image par f de la droite d'équation $y=x+1$.

Exercice 108 *(**)*Soient A, B, C trois points distincts du plan. En se placant dans un repère d'origine A montrer que le triangle ABC est rectangle en A ssi $BC^2=AB^2+AC^2$.

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Exercices

Chapitre 4 : Nombres complexes

1 Quelques calculs (élémentaires ?)

- **Il y a deux formes aves lesquelles on travaille : la forme algébrique $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et la forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.**
- **La forme trigonométrique est bien plus facile à manipuler.**
- **Si il y a un module on peut se servir de $|z| = z\bar{z}$.**
- **Lorsqu'on parle de complexe de module 1 on peut en considérer une écriture de la forme $e^{i\theta}$.**
- **Pour montrer qu'un complexe est réel on peut montrer que $z = \bar{z}$.**

Exercice 109 *(*)*Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z + i\bar{z}$ en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

Exercice 110 *(*)*Simplifier sous la forme trigonométrique les nombres : $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$, $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$.

Exercice 111 *(*)*Soient $u, v \in \mathbb{C}$, montrer l'égalité $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

Exercice 112 *(**)*Soient z et z deux complexes non nuls. Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $Arg(z) = Arg(z')$.

Exercice 113 *(***)*Montrer que : $\forall u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \left[\forall z \in \mathbb{C}, \dfrac{z - u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}\right] \Leftrightarrow |u| = 1$

Exercice 114 *(**)*Montrer que l'application $f : z \mapsto -z\dfrac{1-\bar{z}}{1-z}$ est une involution de $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ (c-à-d montrer que l'image d'un point de D appartient à D et montrer que la composée de f par f est égale à l'application identité sur D)

Exercice 115 *(*)*Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \dfrac{\bar{z} - iz}{i-1} \in \mathbb{R}$

Exercice 116 *(*)*Donner la forme trigonométrique de $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ et de $1 + \sqrt{3}i$ et en déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 117 *(**)*On introduit les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :

$$U = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\} = \{e^{i\theta}\ ;\ \theta \in \mathbb{R}\},\ P = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ Im(z) > 0\},\ D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}.$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.
   (a) Montrer que pour tout $z \in U \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $z \in D$, $h(z) \in P$.
   (c) Déterminer les complexes z tels que $h(z) = z$.
2. Soit g la fonction définie par $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in U$.
   (b) Montrer que pour tout $z \in P$, $g(z) \in D$.

2 Equations. Racines carrées.

- **Avec une équation avec des complexes ne pas se précipiter sur la forme algébrique $a+ib$**
- **Lorque l'on a un équation on peut en étudier la partie réelle et la partie imaginaire pour former de nouvelles équations.**
- **Si on a une équation de degrè 2 il y a une méthode simple !**
- **De nouveau la forme trigonométrique est assez simple à utiliser.**
-

Exercice 118 *(*)*Résoudre $z^2+(2-2i)z+3-2i=0$.

Exercice 119 *(*)*Donner les racines carrées de $-7i$ puis de $2+i$.

Exercice 120 (**) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $|z|-z=1+2i$
2. $\bar{z}=z^7$
3. $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$
4. $2z^2-(9i+1)z-7+11i=0$

Exercice 121 (***) Résoudre $z^6-2(cos\theta)z^3+1=0$ avec $\theta\in]0;\pi[$.
En déduire une factorisation de ce polynôme en produit de trinômes à coefficients réels.

Exercice 122 *(*)*Soit $P(z)=z^3-(4+3i)z^2+(4+12i)z+8-6i$. En trouvant une racine imaginaire pure de P déterminer toutes les racines complexes de P.

Exercice 123 *(*)*Résoudre le système $x+y=1+i$, $xy=13i$.

Exercice 124 *(*)*On cherche à résoudre l'équation $z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=0$ sachant qu'elle possède une racine réelle notée x.

1. Montrer que le réel x vérifie les équations
$$x^3-x^2-x-2=0 \text{ et } -2x^2+9x-10=0.$$
2. En déduire la valeur de x et conclure en déterminant toutes les solutions de l'équation $z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=0$.

Exercice 125 *(*)*Résoudre $e^{2z}-2e^z+2=0$

Exercice 126 *(**)*Soit $a\in\mathbb{R}$. Trouver les couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} cos(a)+cos(a+x)+cos(a+y)=0 \\ sin(a)+sin(a+x)+sin(a+y)=0 \end{cases}$$

3 Racines n-ièmes

- **Dès qu'il y a une puissance un peu grande on doit penser aux racines n-ièmes.**
- **De nouveau la forme trigonomètrique est la plus simple à utiliser.**
- **Si on a une somme on peut parfois utiliser le fait que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.**
- **Si on a un cosinus on peut penser que c'est la partie réelle d'un complexe. idem avec sinus et partie imaginaire.**

Exercice 127 *(*)*Calculer les racines cubiques de a $=1-j$ puis de b $=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ puis les racines quatrièmes de $c=28-96i$.

Exercice 128 *(**)*Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

1. Résoudre (E) en donnant les solutions sous forme simplifiées.
2. Montrer que : $(E) \iff P(z) = 0$ où P est un polynôme à coefficients réels dont on déterminera les coefficients. Déterminer les racines de P et en déduire $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$, où $(p,q,n) \in \mathbb{Z}^3$.

Exercice 129 *(*)*Résoudre $(\sqrt{3}+3i)z^n = -6$.

Exercice 130 *(**)*Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) + 1 = 0$

Exercice 131 Soit $\omega = e^{i2\pi/5}$.

1. En sachant que $1+\omega+...+\omega^4 = 0$ et en posant $z = \omega+\omega^{-1}$, donner une équation du second degrè vérifiée par z.
2. Déterminer alors l'expression de $\cos 2\frac{\pi}{5}$ et $\sin 2\frac{\pi}{5}$.

Exercice 132

1. Résoudre l'équation $z^5+1=0$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.
2. Déterminer un polynôme Q telle que $z^5+1 = (z+1)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. En posant $X = z + \frac{1}{z}$ résoudre l'équation $Q(z) = 0$.
4. Déterminer enfin l'expression de $\cos\frac{\pi}{5}$ sous la forme $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ avec a, b, c, d entiers relatifs.

Exercice 133 *(**)*Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Cacluler $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Exercice 134 *(**)* Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $w = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k-1|^2$ en fonction de n.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |w^k-1|$ en fonction de n.
5. (***) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (z+w^k)^n$ en utilisant la formule du binôme et une somme double.

4 Linéarisation. Angle moitié.

- **Si on a un cosinus on peut penser que c'est la partie réelle d'un complexe. idem avec sinus et partie imaginaire.**
- **Pour linéariser on utilise Euler et le binôme.**
- **Pour factoriser une expression trigonométrique on utilise partie réelle et partie imaginaire puis la formule de Moivre en général.**

Exercice 135 *(*)*Donner la factorisation de $\cos p + \cos q$ à l'aide des nombres complexes.

Exercice 136 *(*)*Linéariser $\cos^5 x$.
Exprimer $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 137 *(*)*Factoriser $\sin(2x) - \sin(4x)$ à l'aide des complexes.

Exercice 138 *(*)*Soit a $\in \mathbb{R}$. Mettre z sous forme trigonométrique : $z = \cos a + i \sin a + j$ avec $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 139 *(*)*Soit x un nombre réel.

1. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire que $\cos(\pi/10) = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
2. Linéariser $\cos^3 x$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$. Avez-vous une autre méthode ?

Exercice 140 *(**)*Soit α un réel telle que $\tan(\alpha)$ existe. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{sin2x + sin3x + sin4x}{cos2x + cos3x + cos4x} = tan\ \alpha$

Exercice 141 *(**)*Soit $f(z) = |z^3 - z + 2|$ avec $z \in \mathbb{U}$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. En utilisant la formule liant module et conjugué, exprimer $|z^3 - z + 2|^2$ en fonction de $\cos\theta$.
3. Soit $g(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$. Etudier les variations de g.
4. En déduire le maximum de la fonction f pour $z \in \mathbb{U}$.

5 Un zeste de géométrie

- **Un module représente une distance $AB = |z_B - z_A|$.**
- **Un argument représente un angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\dfrac{d-c}{b-a}$.**
- **Un angle droit se traduit par un argument de $\pi/2$ et donc à un complexe qui est un imaginaire pur.**
- **Des points alignés se traduisent par un argument nul et donc à un complexe qui est un réel.**

Exercice 142 *(*)*Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|.$$

Exercice 143 *(**)*Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que

1. $z + \bar{z} = |z|$.
2. 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
3. z, z^2 zt z^3 soient les affixes des sommets d'un triangle rectangle.
4. z et $1/z$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.

Exercice 144 *(**)* Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + jb + j^2c = 0$.

Exercice 145 *(*)* Soit $z \in \mathbb{C}/\{2i\}$. On pose $f(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $f(z) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $|f(z)| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $arg(f(z)) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 146 *(*)*

1. Caractériser géométriquement l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto (2+2i)z - (7+4i)$.

2. Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r.
3. Soit r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.
4. Caractériser géométriquement l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $z \mapsto \bar{z}+i$.

Exercice 147 *(**)*Soit f la similitude de centre d'affixe $2-3i$, d'angle $\pi/4$ et de rapport $3\sqrt{2}$.

1. Si M est un point d'affixe z, déterminer l'affixe z' de $f(M)$.
2. Déterminer l'image par f de la droite d'équation $y = x+1$.

Exercice 148 *(**)*Soient A, B, C trois points distincts du plan. En se placant dans un repère d'origine A montrer que le triangle ABC est rectangle en A ssi $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Cours

Chapitre 5 : Bases sur les applications/fonctions

Définition **Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. L'application $\begin{cases} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$ est appelée la *composée de f suivie de g* et se note $g \circ f$.**

Définition **Soit E un ensemble. L'application : $\begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$ est appelée *application identité* ou plus simplement *identité* de E. Elle se note Id_E.**
Soit $f : E \to F$, on a $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ Id_E = f$

Définition **f est dite paire lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$. *l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$***
f est dite impaire lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -f(x)$. *l'origine du repère est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$*.
On dit que f est périodique de période T lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}, x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow x + kT \in \mathcal{D}_f \quad et \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x+kT) = f(x).$$

Définition **Soit f une fonction définie sur I.**
- **On dit qu'un nombre réel M (resp. m) majore (resp. minore) la fonction f sur I lorsque pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$). On dit alors que M (resp. m) est un majorant (minorant) de f sur I.**
- **Une fonction à la fois majorée et minorée est dite bornée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, m \leqslant f(x) \leqslant M$, ce qui revient à $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I, |f(x)| \leqslant k$,**

Définition **On dit qu'une application $f : E \to F$ est *injective* ou que c'est une *injection* si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie :**
- ⋄ $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- ⋄ $\forall x, x' \in E, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
- ⋄ **tout élément de F possède *au plus un* antécédent par f.**

Définition **On dit qu'une application $f : E \to F$ est *surjective* ou que c'est une *surjection* si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie :**
- ⋄ $\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x)$;
- ⋄ $Imf = F$;
- ⋄ **tout élément de F possède *au moins un* antécédent par f.**

Définition **On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* ou que c'est une *bijection* si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie.**
- ⋄ $\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x)$.
- ⋄ **f est injective et surjective.**

Théorème Soit $f : E \to F$ une application.

- f est *bijective* si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
- Si elle existe, une telle application g est *unique*; on l'appelle l'*application réciproque* ou plus simplement la *réciproque* de f et on la note f^{-1}. On alors l'équivalence

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad [y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$$

  Pour être plus clair, l'application f^{-1} est l'application de F dans E qui a tout élément y de F associe son unique antécédant par f dans E. De plus $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
- L'application réciproque f^{-1} est bijective de F sur E. De plus, $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si les fonctions sont réelles, les graphes des applications f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Proposition Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème [THEOREME DE LA BIJECTION] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a); f(b)]$ si f croissante et sur $[f(b); f(a)]$ si f décroissante. De plus f^{-1} est continue et strictement monotone de même monotonie que f.

Définition Soient $f : E \to F$ une application et A une partie de E. On appelle *image (directe)* de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble des éléments de F qui sont images d'élément de A (i.e. qui ont un antécédent dans A). Autrement dit,

$$f(A) = \{y \in F | \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$$

Définition Soient $f : E \to F$ une application et B une partie de F. On appelle *image réciproque* de B par f, notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des éléments de E qui sont antécédents d'éléments de B (i.e. qui ont une image dans B). Autrement dit,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$

Définition Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si le *taux d'accroissement de f en a* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle le *nombre dérivé de f en a* et se note $f'(a)$.
Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la tangente de f en a.
Si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ la droite d'équation $x = a$ est appelée la tangente (verticale) de f en a.

Proposition Soit $f : I \to J$ bijective dérivable sur I.
Soit $a \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.
Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Chapitre 5 : Bases sur les applications

1 Avec les fonctions usuelles

- **Pour travailler avec les fonctions usuelles il faut en connaître les domaines de définition, les dérivées et les propriétés.**
- **Pour montrer une inégalité avec l'étude d'une fontion on fait passer tous les termes d'un coté puis on pose la fonction trouvée et on en cherche le tableau de variation.**

Exercice 149 *(*)*Etudier le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(\sqrt{2x+4}) + \dfrac{1}{x-3}$ puis dériver cette fonction.

Exercice 150 *(*)*Idem avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$.

Exercice 151 *(**)*Idem avec $f : x \mapsto \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$.

Exercice 152 *(*)*Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 153 *(**)*Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$ et en déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 154 *(**)*Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 155 *(**)*Trouver toutes les applications croissantes f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.
on pourra deviner le résultat puis le montrer par l'absurde

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

- **Pour montrer l'injectivité on débute en général ainsi : soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ montrons que $x = y$.**
- **Pour montrer la surjectivité on peut débuter ainsi : soit $y \in F$ montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.**
- **Pour montrer l'injectivité ou la surjectivité on peut aussi s'aider d'un tableau de variations si il n'y a qu'une variable réelle**
- **Pour montrer la bijectivité on peut montrer que la fonction est injective et surjective. On peut aussi utiliser la th de bijection parfois. On peut aussi montrer que tout élément de l'arrivée possède un unique antécédent.**

Exercice 156 *(*)*Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer que
1) si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
2) si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 157 *(**)* Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$.
f est-elle bijective, injective, surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?
Mêmes questions avec $g(x, y) = (x - y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Mêmes questions avec $h(x, y) = 2 + \dfrac{y}{x+y}$ de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 158 *(*)*Soit g définie par $g(z) = z^3$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. g est-elle bijective, injective, surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$? Donner $g^{-1}(\mathbb{R}^+)$ (faire un dessin).

Exercice 159 *(*)*Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $2k$.
Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier k associe $\dfrac{k}{2}$ si k est pair et $\dfrac{k-1}{2}$ si k est impair.
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 160 *(**)*On considère l'application f définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. Montrer que f est surjective
2. Si $\mathbb{U}$ représente le cercle unité, déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 161 *(**)*Un ensemble E est dénombrable si et seulement si il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et E. Cette bijection permet alors de numéroter les éléments de E.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ et $2\mathbb{N}$ sont dénombrables.
2. On pose $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(n) = n/2$ si n est pair et $\varphi(n) = -(n+1)/2$ sinon.
   (a) Calculer $\varphi(n)$ pour n allant de 0 à 5.
   (b) Montrer que φ est bijective.
   (c) En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. On désire montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
   (a) Soit $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $\psi(p,q) = 2^p(2q+1)$. Montrer que ψ est injective.
   (b) On admet que ψ est surjective. Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Exercice 162 *(*)*On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et $sh : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Donner le domaine de définition de chacune de ces deux fonctions.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
3. Simplifier $\mathrm{sh}(f(x))$ et $f(\mathrm{sh}(x))$ lorsque ces expressions existent. Conlusion ?

Exercice 163 *(*)*On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle à préciser.
2. On note g la réciproque de f. Donner le tableau de variation de g et préciser l'ensemble de dérivabilité de g.

Exercice 164 *(*)*On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et préciser l'expression de sa bijection réciproque.

3 Images directe et réciproque

— $x \in f(A)$ **se traduit par** $\exists a \in A \mid x = f(a)$
— $x \in f^{-1}(A)$ **se traduit par** $f(x) \in A$
— **Pour les fonctions d'une variable on s'aide d'un tableau de variations.**

Exercice 165 *(**)*Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que
$\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ puis que $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 166 *(*)*
Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2+4x+1 \end{array}\right.$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-2, +\infty[$ sur son image (qu'on précisera) et déterminer la réciproque associée.
2. Déterminer les images directes et réciproques suivantes : $f([-3,0])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0,1[)$.
3. Reprendre la dernière question avec f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}\right.$

Exercice 167 *(*)*Donner le domaine de définition puis l'image de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
Cette fonction est-elle majorée, minorée, bornée ? Donner le(s) antécédant(s) de 3.

Exercice 168 *(**)*
Soit f l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^{\arcsin t} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin\dfrac{\pi}{x} \end{array}\right.$ Déterminer $f(]0,1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 169 *(*)*Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ défine par $f(x) = x\ln(x) + \dfrac{1}{x}$ pour tout x strictement positif. On pose $I =]0;1]$, $J = [1;e]$.

1. Donner $f(I)$, $f(J)$, $f(\mathbb{R}_+^*)$. Donner $f^{-1}(I)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.
2. f est elle injective sur I, sur J, sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 170 *(*)*Donner le maximum (si il existe) de l'ensemble $A = \{x(1-x)^5 \mid x \in [0;1]\}$

Exercice 171 *(***)*Considérons l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. f est-elle surjective ? injective ?
2. Posons $E = \{z \in \mathbb{C}^* | \ |z-1| = 1\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) = \dfrac{1}{2}\}$. Montrer que f réalise une bijection de E sur F.

4 Un zeste de dérivation

Exercice 172 *(**)*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois et dont la dérivée seconde est strictement positive. Montrer que la courbe de f est au-dessus de toute ses tangentes.
Montrer que $e^x \geqslant x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 173 *(**)*Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et préciser le point dont la tangente est paralléle à la première bissectrice.

Exercice 174 *(*)*Calculer les dérivées des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité. Lorsqu'il y a deux vraiables on dérivera par rapport à x.

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'$
$f(x) = (x^3+4x+1)^3$
$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}}$

$f(x) = \dfrac{(\ln x)^4}{x^3}$
$f(x) = \ln(\sin(x^2))$
$f(x) = x^2 e^{2x}$
$f(x) = \sin(\ln(x^2))$
$f(x) = \tan(x + 3e^x)$
$f(x,y) = xy^3 + \ln(xy)$

$f(x,y) = x\sqrt{yx} + \dfrac{y}{x}$
$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = x^2 + \ln x$
$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$
$f(x) = \sqrt{\tan x}$

Dresser le tableau de variations des quatres dernières fonctions.

Exercice 175 *(**)*Montrer que tan réalise une bijection sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et donner l'expression de la dérivée de sa fonction réciproque.

Exercice 176 *(***)* Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y > 0$.

Lycée Arago Perpignan **MPSI**
Cours

Chapitre 6 : Fonctions usuelles

1 Fonction valeur absolue

<u>Définition</u> La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ si $x \geqslant 0$. Elle représente la distance entre x et 0. De plus pour tout couple (x, y), $|x - y|$ représente la distance entre x et y.

Dérivabilité et continuité : cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Représentation graphique : c'est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Règles de calcul : soient x et y deux réels et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$|-x| = |x|$ (parité), $|x \times y| = |x| \times |y|$ d'où $|x^n| = |x|^n$ et si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
$|x| = |y| \Longleftrightarrow x = y$ *ou* $x = -y$ et pour tout a réel positif : $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
Inégalité triangulaire $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

Démonstration

Exemple Résoudre $|x - 1| \leqslant |x + 3|$.

2 Fonctions puissances entières

<u>Définition</u> Soit x un nombre réel et n un entier relatif, on pose $x^0 = 1$, $x^n = \underbrace{x \times x \times ... \times x}_{n\ fois}$ lorsque $n \geqslant 1$ et $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ lorsque $n < 0$.

Règles de calcul (si les expressions existent)

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n \qquad (x^n)^m = x^{n \times m} \quad et \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$$

La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si n est un entier srictement positif ; elle est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair). Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ lorsque n est non nul. Sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ si n est un entier negatif ; elle est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair). Sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ lorsque n est non nul. Sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^*$.
Représentation graphique :

3 Fonctions logarithme, exponentielle

Ensemble de définition

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Continuité

Les fonctions exp et ln sont continues sur leur ensemble de définition.

Dérivabilité

Les fonctions exp et ln sont dérivables sur leur ensemble de définition. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \exp x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln' x = \frac{1}{x}$$

Variations et limites

Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Lien entre exponentielle et logarithme

La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit,

$$\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$$

Transformation somme/produit

L'exponentielle transforme une somme en produit et le logarithme transforme un produit en somme :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln xy = \ln x + \ln y$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

Limites usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$$

Graphe

Attention ! Le produit xy peut être strictement positif sans que x et y le soient (ils peuvent être aussi tous deux strictement négatifs). Il ne faut donc surtout pas écrire $\ln xy = \ln x + \ln y$ si on n'est pas sûr que x et y sont strictement positifs. Si xy est strictement positif, c'est que $xy = |xy|$ et on peut écrire sans prendre de risque

$$\ln xy = \ln|x| + \ln|y|$$

4 Fonctions puissances quelconques

Définition Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On appelle x^y le réel noté x^y défini par $x^y = e^{y\ln(x)}$.

Remarque Cette définition généralise la définition sur les puissances entières, en effet pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$x^n = x \times x \times x ... \times x = e^{\ln(x)} \times .... \times e^{\ln(x)} = exp(\ln(x) + ... + \ln(x)) = exp(n\ln(x))$$

Exemple $\lim_{x\to0^+} x^x =$

Proposition Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes.

(i) $x^y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln x^y = y\ln x$

(ii) $x^{y+y'} = x^y x^{y'}$

(iii) $(xx')^y = x^y x'^y$

(iv) $x^{yy'} = (x^y)^{y'} = (x^{y'})^y$

(v) $x^{-y} = \dfrac{1}{x^y} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^y$

Considérons $\alpha \in \mathbb{R}$:

Ensemble de définition

L'ensemble de définition de $x \mapsto x^\alpha$ est $\mathbb{R}_+^*$.

Continuité

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur son ensemble de définition.

Dérivabilité

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Variations et limites

- Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante.
- Si $\alpha < 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante.
- Si $\alpha = 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est constante égale à 1.
- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 1$.

Bijectivité

Pour $\alpha \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{1/\alpha}$.

Graphe

Croissances comparées

L'idée à retenir est, qu'en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance, qui elle-même l'emporte sur le logarithme.

Proposition [Croissances comparées] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^a |\ln x|^b = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{(\ln x)^b} = +\infty$$

Démonstration

<u>Théorème</u> [Rappel] Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une application bijective de I sur J. Alors :

1. Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.
2. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

5 Fonctions circulaires réciproques

Définition

- La fonction sin réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. On appelle fonction *arcsinus* sa fonction réciproque notée arcsin.
- La fonction cos induit une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. On appelle fonction *arccosinus* sa fonction réciproque notée arccos.
- La fonction tan induit une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction *arctangente* sa fonction réciproque notée arctan.

Remarque

- La fonction arcsin est donc une bijection strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $x \in [-1,1]$, $\arcsin x$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
  On a $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout x de $[-1;1]$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  Ainsi : $\boxed{y = arcsin(x) \text{ et } x \in [-1;1] \text{ ssi } x = \sin y \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$
- La fonction arccos est donc une bijection strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$. Pour $x \in [-1,1]$, $\arccos x$ est l'unique réel de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.
  On a $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout x de $[-1;1]$ et $\arccos(\cos(x)) = x$ pour tout x de $[0;\pi]$.
  Ainsi : $\boxed{y = arccos(x) \text{ et } x \in [-1;1] \text{ ssi } x = \cos y \text{ et } y \in [0;\pi]}$
- La fonction arctan est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.
  On a $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $\arctan(\tan(x)) = x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
  Ainsi : $\boxed{y = arctan(x) \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ ssi } x = \tan y \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$. $\boxed{\text{De plus } \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}}$

Graphe

Exemple

1. Donner les valeurs de arccos et arcsin en -1, $-\sqrt{3}/2$, $-1/\sqrt{2}$, $-1/2$, 0, $1/2$, $1\sqrt{2}$, $\sqrt{3}/2$ et 1.
2. Donner les valeurs particulières de arctan.
3. Simplifier $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6}))$, $\arccos(\cos(3\pi))$.
4. Soit $x \in [-1;1]$. Calculer $\sin(\arccos(x))$.
5. Soit $x \in [-1;1]$. Calculer $\cos(\arccos(x) + \arccos(-x))$ et en déduire la valeur de $\arccos(x) + \arccos(-x)$.
6. Soit $x \in [-1;1]$. Montrer sur $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

Proposition

- **Parité** : les fonctions arcsin et arctan sont impaires.
- **Continuité** : les fonctions arcsin, arccos et arctan sont continues sur leur ensemble de définition.
- **Dérivabilité** : les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \text{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}$

6 Fonctions hyperboliques directes (et réciproques ?)

6.A Fonctions hyperboliques directes

Définition [Fonctions hyperboliques] On appelle *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique* les trois fonctions notées respectivement ch, sh et th telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Remarque Les formules définissant $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ sont les analogues des relations d'Euler permettant de définir sin et cos à partir de l'exponentielle complexe. La seule différence est qu'ici, les exponentielles sont réelles.

- Formule fondamentale :
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$
En effet :

- Formules d'addition [Hors programme] :
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \qquad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

- Formules de duplication [Hors programme mais c'est bien de les connaître !]
$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1$$
$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \quad et \quad \operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

Remarque Les deux premières formules d'addition de trigonométrie hyperbolique se déduisent des formules de trigonométrie usuelle. Il suffit de remplacer cos par ch et sin par $i \operatorname{sh}$ puis de supprimer les i restants.

Proposition

- Les fonctions sh et th sont impaires et la fonction ch est paire.
- Les fonctions sh, ch et th sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sh, ch et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$$
- Les fonctions sh et th sont strictement croissantes. La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$$

Graphe

Lycée Arago Perpignan
Cours

MPSI

Chapitre 6 : Fonctions usuelles

Valeur absolue

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ si $x \geqslant 0$.
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $|-x| = |x|$ (parité), $|x \times y| = |x| \times |y|$, $|x^n| = |x|^n$, si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
$|x| = |y| \iff x = y$ *ou* $x = -y$ et pour tout a réel positif : $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire)

Fonctions puissances entières

On pose $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$x^n \times x^m = x^{n+m} \qquad (x \times y)^n = x^n \times y^n \qquad (x^n)^m = x^{n \times m} \qquad et \qquad \dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.
La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si n est un entier srictement positif ; elle est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair). Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ lorsque n est non nul. Sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ si n est un entier negatif ; elle est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair). Sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ lorsque n est non nul. Sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Fonctions logarithme, exponentielle

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
exp et ln sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \exp x \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln' x = \dfrac{1}{x}$
Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes. La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre : $\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}}$ et $\exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Fonctions puissances quelconques

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle x^α le réel noté x^α défini par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
On dispose des mêmes régles de calcul.
$x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Arcsin, Arccos, Arctan

- ◇ La fonction sin réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. On appelle fonction *arcsinus* sa fonction réciproque notée arcsin.
- ◇ La fonction arcsin est donc une bijection strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'unique réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.
  On a $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout x de $[-1; 1]$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout x de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Ainsi : $\boxed{y = arcsin(x) \text{ et } x \in [-1; 1] \text{ ssi } x = \sin y \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$
- ◇ La fonction cos induit une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle fonction *arccosinus* sa fonction réciproque notée arccos.
- ◇ La fonction arccos est donc une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x.
  On a $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout x de $[-1; 1]$ et $\arccos(\cos(x)) = x$ pour tout x de $[0; \pi]$.
  Ainsi : $\boxed{y = arccos(x) \text{ et } x \in [-1; 1] \text{ ssi } x = \cos y \text{ et } y \in [0; \pi]}$

- ◇ La fonction tan induit une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction *arctangente* sa fonction réciproque notée arctan.
- ◇ La fonction arctan est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

  On a $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $\arctan(\tan(x)) = x$ pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

  Ainsi : $\boxed{y = arctan(x) \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ ssi } x = \tan y \text{ et } y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}$. $\boxed{\text{De plus } \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}}$

Proposition

- ◇ **Parité** : les fonctions arcsin et arctan sont impaires.
- ◇ **Continuité** : les fonctions arcsin, arccos et arctan sont continues sur leur ensemble de définition.
- ◇ **Dérivabilité** : les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- ◇ $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- ◇ $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- ◇ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$

Fonctions hyperboliques directes

On appelle *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique* les trois fonctions notées respectivement ch, sh et th telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

- ◇ Formule fondamentale : $\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$
- ◇ Les fonctions sh et th sont impaires et la fonction ch est paire.
- ◇ Les fonctions sh, ch et th sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ◇ Les fonctions sh, ch et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$$

- ◇ Les fonctions sh et th sont strictement croissantes. La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$$

Lycée Arago Perpignan MPSI
Exercices

Chapitre 6 : Fonctions usuelles

1 Valeurs absolues, puissances, logarithme, exponentielle

— Avec les valeurs absolues, en général, on séparé l'étude en plusieurs cas suivant le signe du membre dans la valeur absolue.
— Formule de référence : $x^y = e^{y\ln x}$

Exercice 177 *(*)*Donner la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ||x| - |x+2||$.

Exercice 178 *(*)*Résoudre l'inéquation : $|x+1| - |3x+4| \leqslant 1$.

Exercice 179 *(*)*Résoudre l'inéquation : $|x^2 + 2x| \geqslant 3$.

Exercice 180 *(*)*Résoudre $5^{x^2} = 7^{x^3}$

Exercice 181 *(*)*Résoudre $\ln(x+3) + \ln(x) > 2\ln 2$.

Exercice 182 *(*)*Résoudre $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 183 *(*)*Donner le domaine de définition et dériver la fonction $f : x \mapsto (1+x^4)^{1-2x} + \ln^2(4x^4 + ee^x)$.

Exercice 184 *(*) Questions indépendantes*

1. Simplifier $\left(exp(x^2)\right)^{\dfrac{\ln(x^{1/x})}{x}}$.
2. Montrer que : $\forall x \in]0;1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que l'équation $2^x + 3^x = 5$ possède une unique solution réelle strictement positive et donner cette solution.

Exercice 185 *(*)*Domaine de définition et dérivée de $x \mapsto (1+\sin x)^{\cos x}$.

Exercice 186 *(**)*Etudier $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$. (variations, limites , allure du graphe)

Exercice 187 *(*)*Etudier $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$. (variations, limites , allure du graphe)

2 Fonctions trigonométriques réciproques

— La chose la plus importante : connaître les domaines de définition et les domaines images.
— La seconde chose la plus importante : connaître les dérivées.
— Pour résoudre une équation avec les fonctions arcsin, arccos ou arctan on peut procéder par analyse synthèse en appliquant sin, cos ou tan. Mais pour la synthèse il faut se souvenir qu'on peut avoir deux cosinus (ou sinus ou tangentes) égaux sans que les angles soient identiques.
— Pour montrer une égalité on peut poser une fonction et montrer qu'elle est constante en montrant que sa dérivée est nulle.

Exercice 188 *(*) questions indépendantes*

1. Calculer $\arcsin(\sin\dfrac{7\pi}{4})$ puis $\arccos(\sin\dfrac{7\pi}{4})$.
2. Tracer $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.
3. Simplifier $\cos(\arctan x)$ puis $\sin(\arctan x)$.

Exercice 189 *(*)*Domaine de définition de $x \mapsto \dfrac{1}{arcsin(2x)}$.

Exercice 190 *(*)*Résoudre $arctan(3-x)+arctan(4-\frac{1}{x})=\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 191 *(*)*Domaine de définition et dérivée de $x\mapsto arccos(x)+arccos(-x)$.

Exercice 192 *(*)*Montrer que $\frac{\pi}{4}=\arctan(1/2)+\arctan(1/3)$. Montrer aussi $\frac{\pi}{4}=\arctan(3)-\arcsin(1/\sqrt{5})$.

Exercice 193 *(**)*On pose $f(x)=\arcsin\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Donner $f(0)$, $f(1)$. Donner les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et déterminez f'.
4. Montrer alors que pour tout x de $]-\infty;1[$, $f(x)=\frac{\pi}{4}+\arctan(x)$.
5. Que se passe-t-il sur $]1;+\infty[$?

Exercice 194 *(**)*On pose $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de f.
4. On souhaite retrouver ce résultat par une autre méthode.
   (a) Pour $x\in D_f$ on pose $\theta=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, en calculant uniquement $\sin(\theta)$ montrer que $x^2=\tan^2\theta$.
   (b) Conclure.

Exercice 195 *(***)*

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Simplifier alors alors le terme $\arccos(4x^3-3x)$ après avoir cherché les conditions d'existence.

Exercice 196 *(**)* Montrer que pour tout $x\in]-1;1]$, $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\arccos(x)$.

1. En dérivant une fonction.
2. En simplifiant directement l'expression en posant $\theta=\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ et en calculant $\cos 2\theta$.

Exercice 197 *(**) Questions indépendantes*

1. Résoudre $\arcsin(\tan x)=x$.
2. Montrer que pour tout x de $]-1;1[$ on a $\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en posant $u=\arcsin x$.
3. Résoudre $\arctan(x)+\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}$.
4. Résoudre $2x=\arcsin\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)$.
5. Résoudre $\arcsin(2x)=\arccos x$.

Exercice 198 *(*)*Dériver, lorsque c'est possible, les fonctions g, h et k définies par :

$$g(x)=\arctan(th(x))\qquad h(x)=\arctan\frac{1}{1+x^2}\qquad k(x)=\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$$

Exercice 199 *(**) POLYNOMES DE TCHEBYCHEV*

Préliminaire : Montrer que la fonction cos est bijective de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. On note alors *arccos* sa bijection réciproque.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose alors $T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$ pour tout x de $[-1;1]$.

1. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

2. (a) Exprimer pour tout réel x, $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) Pour tout x de $[-1;1]$, calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ (on trouvera des polynômes en x).
3. On pose $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$.
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Montrer que g est nulle sur $[0;\pi]$.
   (c) Montrer que g est 2π-périodique et étudier sa parité. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. (a) Montrer que pour tout réel a, $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$.
   (b) En déduire que pour $x \in [-1;1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$.
   (d) Ecrire une fonction Python d'argument $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1;1]$ renvoyant $T_n(x)$.
5. Simplifier pour tout réel a, le terme $(\cos(a) + i\sin(a))^n + (\cos(a) - i\sin(a))^n$.
   En déduire que pour tout $x \in [-1;1]$,
   $$T_n(x) = \frac{(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n}{2}$$
   Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$.

3 Fonctions hyperboliques

Exercice 200 *(*)*Expliciter la bijection réciproque de $x \mapsto th(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 201 *(*)*
1. Résoudre $5\,\text{ch}(x) - 3\,\text{sh}(x) = 4$.
2. Simplifier $\text{sh}(\ln(x))$ et $th(\ln(\sqrt{x}))$.

Exercice 202 *(*)*Soient a, b réels et n entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{ch}(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{sh}(a+kb)$.

Exercice 203
1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$.
2. Montrer que ch réalise une bijection sur $\mathbb{R}^+$. On note $argch$ sa bijection réciproque.
3. Simplifier alors $argch(2x^2 - 1)$.

Exercice 204 *(*)*Domaine de définition et dérivée de $x \mapsto arctan((x+a)/(1-ax))$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ fixé.

Exercice 205 *(*)*Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $arctan(sh(x)) = arccos(1/ch(x))$.

Exercice 206 *(**)*On considère les deux fonctions f et g définies par
$$f(x) = \arctan(\text{sh}(x)) \quad et \quad g(x) = \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right)$$
1. Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g.
2. Préciser les points où f est dérivable et donner une expression simplifier de f'.
3. Faire de même avec la fonction g.
4. En déduire une relation entre f et g sur un intervalle à préciser.
5. En calculant $f\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$ puis $g\left(\frac{\ln(3)}{2}\right)$, la tangente de quel angle peut-on en déduire ?

Exercice 207 *(**)*Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la partité de f.
2. Chercher la limite de f en 0 (à droite et à gauche)
3. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \left(th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}(\frac{1}{x})$$
5. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}_+^*$, $th(X) < X$.
6. Dresser le tableau de variations de f. Donner l'image de f.
7. Monter que f est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 208 *(**)*

1. Montrer que pour tout x réel on a : $th(2x) = \dfrac{2thx}{1+th^2(x)}$.
2. En déduire que, pour x non nul,
$$\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{thx} = th(x)$$
3. Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul, simplifier
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k th(2^k a)$$
4. Limite de S_n ?

Exercice 209 *(**)*Pour tout $n \geqslant 1$ et tout réel x on pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + th^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$.

1. Montrer que l'on a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{th(x)}{x} = 1$.
2. Démontrer les deux formules suivantes : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(2t) = \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) \qquad et \qquad \mathrm{sh}(2t) = 2\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)$$
En déduire une expression de $th(2t)$ en fonction uniquement de $th(t)$.
3. Que vaut $S_n(0)$?
4. Si $x > 0$, prouver l'égalité, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$S_n(x) = \ln\left(2^n th\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(th(x)\right)$$
5. Etudier la parité de la fonction $x \mapsto S_n(x)$.
En déduire, sans calcul supplémentaire, une expression de $S_n(x)$ pour $x < 0$.
6. (a) Soit $x > 0$, fixé. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$
   (b) Soit un entier $n \geqslant 1$, fixé. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n(x)$
   (c) Soit un entier $n \geqslant 1$, fixé. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0} S_n(x)$

Chapitre 7 : Bases sur l'intégration

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On considère des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles ou complexes.

1 Préliminaires sur la dérivation des fonctions à valeurs complexes

Définition Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$. Alors, on peut définir sa partie réelle $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ qui sont alors des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ admet une limite en $a \in I$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire en admettent une et, dans ce cas :
$$\lim_a f = \lim_a \mathrm{Re}(f) + i \lim_a \mathrm{Re}(f)$$
- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en a si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.
- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur I si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.
- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont et, dans ce cas :
$$f'(a) = (\mathrm{Re}\, f)'(a) + i(\mathrm{Re}\, g)'(a)$$
- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont et, dans ce cas :
$$f' = (\mathrm{Re}\, f)' + i(\mathrm{Re}\, g)'$$
- ◇ L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues sur I est noté $C^0(I, \mathbb{K})$.
- ◇ L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ dérivables sur I est noté $D(I, \mathbb{K})$.
- ◇ L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I est noté $C^1(I, \mathbb{K})$.
- ◇ Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Proposition

- ◇ Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. La fonction $f : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\phi(t)} \end{cases}$ est dérivable sur I.
  Sa dérivée est $f' : t \mapsto \phi'(t)e^{\phi(t)}$.
- ◇ La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $f' : t \mapsto \alpha e^{\alpha t}$.

Attention ! Cette année, nous ne dirons rien des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. La théorie est tout à fait différente.

Démonstration $e^{\phi} = e^{\mathrm{Re}(\phi)}(\cos \mathrm{Im}\, \phi + i \sin \mathrm{Im}\, \phi)$ puis on dérive !!!

2 Primitives et intégrales des fonctions à valeurs réelles

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f.

Exemple

Proposition Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f possède une primitive F sur I.
Alors les primitives de f sur I sont toutes les applications $F + C$, C décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration

Attention ! Il est important de considérer une fonction continue sur un *intervalle*. Les fonctions $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln|x| \end{cases}$ et $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| - 1 \text{ si } x < 0 \\ \ln|x| + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$ admettent toutes deux pour dérivée la fonction inverse mais elles ne diffèrent pas d'une constante ($f_2 - f_1 = -1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f_2 - f_1 = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$). En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles (d'où les deux constantes différentes).
Autre exemple : $x \mapsto arctan(x) + arctan(1/x)$.

Théorème [Admis] Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

- Soit $F : I \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors F est dérivable sur I et $F' = f$ sur I. Autrement dit F est une primitive de f sur I.
- Toute fonction continue sur I admet une infinité de prmimitives sur I.
- Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule primitive F_1 de f sur I telle que $F_1(a) = A$. Elle est définie par :

$$\forall x \in I, \quad F_1(x) = A + \int_a^x f(t)dt$$

Notation : $\displaystyle\int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sans préciser de valeur particulière en un point.

Théorème [Theorème fondamental de l'analyse] Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ se note $[F]_a^b$ ou encore $[F(t)]_{t=a}^{t=b}$, elle est indépendante du choix de la primitive F de f.

Démonstration En effet si F est une primitive de f sur I alors $F = \int_a^x f(t)dt + cst$ donc $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Corollaire Soit $f \in C^1(I)$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Exemple + interprétation en termes d'aires.

Proposition

Linéarité L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Relation de Chasles Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

3 Primitives et intégrales des fonctions à valeurs complexes

Définition Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in C([a,b], \mathbb{C})$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b Re(f)(t)dt \ + \ i \ \int_a^b Im(f)(t)dt \ \ note \int_a^b f(t)dt$$

L'ensemble des résultats de la partie précédente restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes sauf l'interprétation en termes d'aires.

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ix}dx = 0.$

Proposition Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\int^x e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}.$

Proposition Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\displaystyle\int^x t^{\alpha}dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$

4 Outils d'intégrations

4.A Intégration par parties

Proposition [Intégration par parties] Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. Soient $a, b \in I$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

démo easy ! Méthode LPE.

Exemple

- ▷ Calcul d'une primitive de ln.
- ▷ Calcul d'une primitive de arctan.
- ▷ Calcul d'une primitive de $x \mapsto xe^x$.
- ▷ Calcul d'une primitive de $x \mapsto (x^2 + 2x)\sin x$.

Exercice 5 *Intégrales de Wallis On pose pour tout $n \geqslant 0$,*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. *Calculer I_0 et I_1. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.*
2. *Donner une expression de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.*

4.B Changement de variable

Proposition [Changement de variable] Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient f une fonction continue de I dans dR et φ une fonction de classe C^1 de J dans I. Soient $a, b \in J$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I Alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi\varphi'$ sur J et

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du = [F(\varphi)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Remarque Méthode : on dit qu'on pose $t = \varphi(u)$. On remplace la nouvelle variable dans la fonction, on remplace les bornes et on remplace l'élément différentiel avec la "formule" $dt = \varphi'(u)du$.

Exemple En effectuant le changement de variable $t = \sin u$, on a $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \pi/2$.

Proposition Soit f continue sur $[-a; a]$

Fonction paire Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

Fonction impaire Si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Fonction périodique Si f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exemple Soit $a > 0$.

- ▷ Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$.
- ▷ Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$ est $x \mapsto \arcsin\dfrac{x}{a}$.
- ▷ Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$ est $x \mapsto \arccos\dfrac{x}{a}$.
- ▷ Calcul d'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
- ▷ Une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \dfrac{1}{5}\sin^5 x$ en posant $u = \sin x$.

4.C Utilisation des complexes

Méthode Passage en complexe On sait que la partie réelle (resp. imaginaire) de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle (resp.imaginaire). Il est parfois plus facile de passer en complexe pour revenir en réel.

Exemple Calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^t \sin t dt$.

4.D Cas des fractions rationnelles

Méthode Intégration des fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) Voir un futur chapitre pour plus de détails ! Je ne donne que quelques recettes sur des exemples.

$$\int^x \frac{1}{(t+1)(t-1)}dt, \int^x \frac{1}{(t+2)^2(t-1)}dt, \int^x \frac{1}{t^4-16}dt \ (?), \int^x \frac{t+2}{t^2+t+1}dt,...$$

Méthode Intégration des fractions rationnelles trigonométriques On appelle fraction rationnelle trigonométrique une fonction du type $t \mapsto R(\cos t, \sin t)$ où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées.
On peut poser $u = \cos t$ ou $u = \sin t$ ou $u \tan t$ ou encore $u = \tan \frac{t}{2}$ et on utilise les formules

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \tan t = \frac{2u}{1-u^2} \qquad du = (1+u^2)dt/2$$

Exemple

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}dt = \frac{\ln 3}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos t}dt = ...$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t(1+\tan t)} = ...$

Méthode Intégration des fractions rationnelles hyperboliques On appelle fraction rationnelle hyperbolique une fonction du type $t \mapsto R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées.

On pose $u = e^t$ et on se ramène à l'intégration d'une fraction rationnelle classique.

Lycée Arago Perpignan
Cours

MPSI

Chapitre 7 : Bases sur l'intégration

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f.
Les primitives de f sur I sont toutes les applications $F + C$, C décrivant $\mathbb{R}$.

Théorème [Theorème fondamental de l'analyse] Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $(a, b) \in I^2$,

— Soit $F_a : I \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in I$, $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors F_a est dérivable sur I et $F_a' = f$ sur I. Autrement dit F_a est une primitive de f sur I.
— Toute fonction continue sur I admet une infinité de prmimitives sur I.
— Pour toute primitive F de f sur I on a $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$
— $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire algébrique délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $y = a$ et $y = b$.

Proposition

Linéarité Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) + g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
Relation de Chasles Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $c \in]a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
Intégration par parties Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. Soient $a, b \in I$ alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$
Changement de variable Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient f une fonction continue de I dans dR et φ une fonction de classe C^1 de J dans I. Soient $a, b \in J$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$

— Dans une IPP on dérive en général dans cet ordre : ln puis polynômes puis exponentielle.
— Dans un changement de variable on doit changer les bornes, la fonction et l'élément differentiel.

Méthode Si on a la forme $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx$ on a deux cas
— Si le dénominateur se factorise on doit décomposer la fraction
— sinon on doit se ramener à la forme $\dfrac{u'}{1 + u^2}$ en commencant par faire apparaître une identité remarquable au dénominateur

Méthode si on a une fraction avec des cosinus, des sinus et des tangentes on peut poser $u = \cos t$ ou $u = \sin t$ ou $u \tan t$ ou encore $u = \tan \dfrac{t}{2}$ et on utilise les formules $\cos t = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$ $\quad \sin t = \dfrac{2u}{1 + u^2}$ $\quad \tan t = \dfrac{2u}{1 - u^2}$ $\quad du = (1 + u^2)dt/2$

Définition Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in C([a, b], \mathbb{C})$. On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b Re(f)(t)dt \ + \ i \int_a^b Im(f)(t)dt \ \ note \int_a^b f(t)dt$$

Proposition Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\int^x e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\displaystyle\int^x t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$.

Méthode si on a un polynôme et/ou une exponentielle multiplié avec un sinus ou un cosinus on peut se ramener aux complexes en considérant une partie réelle ou une partie imah=ginaire.

Intervalle	Fonctions	Primitive
$\mathbb{R}$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$]0;+\infty[$	$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	$e^{ax},\ a \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$]k\pi;k\pi+\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan(x)}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$th(x)$	$\ln(\mathrm{ch}\,x)$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	thx
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$-\dfrac{1}{th(x)}$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$]-1;1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

Fonctions	Primitive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$u' \times [v' \circ u]$	$v \circ u$

Lycée Arago Perpignan MPSI
Exercices

Chapitre 7 : Bases sur l'intégration

1 Formes à reconnaître et outils de base

Exercice 210 *(*)*Calculer une primitive de la fonction proposée.

$f_1 : x \mapsto xe^{x^2}$
$f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$
$f_3 : x \mapsto (2x+3)^4$
$f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$
$f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
$f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$
$f_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$

Exercice 211 *(*)*Calculer

$\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{1+\cos^2(t)}dt$
$\displaystyle\int^t xe^{-x^2}dx$
$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx$
$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{(1+x^3)^4}dx$
$\displaystyle\int^t e^{e^x+x}dx$
$\displaystyle\int_2^e \frac{1}{t\ln^3(t)}dt$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin^3 x dx$

Exercice 212 *(*)*Calculer $\displaystyle\int_0^{10} e^{Ent(x)}dx$ puis $\displaystyle\int_0^1 |x-t|dt$ en fonction de x.

2 Outils pour calculer : intégration par parties, changement de variables, fractions

Exercice 213 *(*)*Calculer, avec un changement de variable

$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos^2(t)}dt$
$\displaystyle\int_0^t xe^{-x^2}dx$
$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx$
$\displaystyle\int_0^t e^{e^x+x}dx$
$\displaystyle\int_2^e \frac{1}{t\ln^3(t)}dt$
$\displaystyle\int^x \frac{1}{1+e^t}dt$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin^3 x dx$
$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ $(u=\cos(2x))$
$\displaystyle\int_{-1}^1 \arcsin x dx$
$\displaystyle\int \frac{e^{x/2}\,\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}(x)}dx$ $(u=e^x)$

Exercice 214 *(**)*Calculer, souvent avec une IPP,

$\displaystyle\int^t \arctan x dx$
$\displaystyle\int^t x\arctan^2 x dx$
$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$
$\displaystyle\int_1^e \cos(\ln t)dt$
$\displaystyle\int^x \sin t\,\mathrm{sh}\,t dt$ (IPP^2)
$\displaystyle\int_{-1}^1 \arcsin x dx$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\arctan x}{x^2+1}dx$ (IPP)
$\displaystyle\int^x \tan^n t dt$ pour $n\in\{1,...,4\}$

Exercice 215 *(*)*Calculer une primitive sur l'intervalle proposé de la fonction proposée :
- sur $]0;\pi[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ en posant $u=\cos x$.
- sur $\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$ en posant $u=e^x$.
- sur $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x}$.

Exercice 216 *(**)*On pose $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\cos(t)}dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)}{2+\cos(t)}dt$

1. En posant $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ calculer I.
2. En déduire J.

Exercice 217 *(*)*Calculer,

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}dx \qquad\qquad \int^t \frac{1}{x^2+7}dx$$

Exercice 218 *(***)*

1. Montrer que $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. En déduire, à l'aide d'une IPP, une primitive de $x \mapsto \sqrt{16x^2+9}$.

Exercice 219 *(***)*On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

1. Donner une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. On admet que (I_n) converge vers 0. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 220 *(***)*On note $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{2+\sin t}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2+\sin t}dt$

1. En posant $t = \pi - u$ donner une relation simple entre I et J.
2. On pose pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sin t}dt$. Montrer que F continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in]0;\pi[$, calculer $F(x)$ en effectuant un changement de variable.
4. En déduire J puis I.

Exercice 221 *(***)*Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$: $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$: pour tout $q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
3. Montrer enfin que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 222 *(***)*Soit $a, b > 0$ fixés.
Soit f une fonction croissante, de classe C^1 et réalisant une bijection de $[0;a]$ sur $[0;b]$ telle que f^{-1} soit aussi de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(t)dt + \int_0^a f(t)dt = ab$.

3 Avec le théorème fondamental de l'analyse

Exercice 223 *(***)* **Attention !** On admet pour cet exercice les résultats suivants

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt \qquad (H_1)$$

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos(t)-1}{t}dt = 0 \qquad (H_2)$$

On sera donc amené à utiliser ces résultats dans une ou plusieurs des questions suivantes.

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pourra intégrer par parties.
3. Montrer que $f(x)$ possède une limite finie en 0 et déterminer cette limite.

Exercice 224 *(**)*On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{dt}{1+t^4} \qquad et \qquad g(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t}\cos(tx)dt$$

1. Justifier qu'il existe une primitive H de $h : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$.
   Sans chercher à calculer H mais en l'utilisant, justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée en fonction de x.
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{tx}{2\pi}$, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner sa dérivée en fonction de x et de $g(x)$.

Exercice 225 *(*)*Dériver la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} e^{\sqrt{t}}$ après avoir préciser l'ensemble de dérivabilité.

Exercice 226 *(***)*Dériver la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\sin^2(x)}^{\cos^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})$ après avoir préciser l'ensemble de dérivabilité. Simplifier cette dérivée sur $[0;\pi/2]$ puis donner une expression plus simple de f sur $\mathbb{R}$.

4 Un peu plus complexe

Exercice 227 *(**)*Calculer,

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2(x)dx \qquad \int_0^t e^{2x+1}\cos(3x+4)dx \qquad \int_0^t xe^{2x+1}\sin(2x)dx$$

Exercice 228 *(*)*Donner une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ par linéarisation.

Exercice 229 *(**)*

1. Calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{t+i}dt$.
2. Plus généralement, calculer $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t-z}$ où $z = a+ib \in \mathbb{C}$.

Lycée Arago Perpignan
Cours

MPSI

Chapitre 8 : Equations différentielles linéaires

Les équations différentielles *linéaires* sont de la forme $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et b sont des fonctions.
L'entier n est appelé l'*ordre* de l'équation différentielle. La fonction b est appelé le *second membre*. Si b est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou *sans second membre*.
Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Théorème [Structure de l'ensemble des solutions] Soit y_p une solution de l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$. Alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $y_p + y_H$ où y_H décrit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode Soit à résoudre l'EDL $y' + ay = b$ avec $a, b \in C(I, \mathbb{K})$. On note A une primitive de a.

Résolution de l'EDL homogène associée La solution générale de l'EDL homogène est de la forme λe^{-A} où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante.

Recherche d'une solution particulière Soit il existe une solution particulière évidente y_0. Soit on cherche une solution particulière sous la forme $\bar{y} = \lambda e^{-A}$ où λ est une *fonction*. Autrement dit, on remplace la constante λ de la solution générale de l'EDL homogène par une fonction : cette méthode s'appelle *variation de la constante*.

Cas $b = P(x)e^{kx}$ avec P un polynôme On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{kx}$ où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :

1. inférieur ou égal à $\deg P$ si $k \neq -a$,
2. inférieur ou égal à $\deg P + 1$ si $k = -a$,

Théorème [Solutions d'une EDL sans second membre (cas complexe)] Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ dont on recherche les solutions à valeurs *complexes*.

— Si l'équation caractéristique $(ax^2 + bx + c = 0)$ possède deux racines *distinctes* r_1 et r_2, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
— Si l'équation caractéristique possède une racine *double* r, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Théorème [Solutions d'une EDL sans second membre (cas réel)] Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*.

— Si l'équation caractéristique possède deux racines *réelles distinctes* r_1 et r_2, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
— Si l'équation caractéristique possède une racine *double* r, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
— Si l'équation caractéristique possède deux racines *complexes conjuguées* $r \pm i\omega$, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \mapsto (\lambda \sin \omega x + \mu \cos \omega x)e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ces fonctions peuvent également s'écrire $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \varphi)$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \varphi)$ avec $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$.

Théorème [Résolution de $ay'' + by' + cy = P(x)e^{kx}$] On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{kx}$ où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré :

1. inférieur ou égal à $\deg P$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique,
2. inférieur ou égal à $\deg P + 1$ si k est racine *simple* de l'équation caractéristique,
3. inférieur ou égal à $\deg P + 2$ si k est racine *double* de l'équation caractéristique,

Chapitre 8 : Equations différentielles linéaires

1 Equation d'ordre 1

Exercice 230 *(*)* Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'\sin(x)+y\cos(x)=1$ sur $]0;\pi[$.
2. $xy'-2y=x^2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $(1+x^2)y'+xy=1$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\sqrt{1-x^2}y'-y=1$ sur $]-1;1[$.
5. $y'=3y+e^{3x}$
6. $y'-2y=\cos x+2\sin x$
7. $y'+y=(x^2-2x+2)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $xy'-y=x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $y(1)=0$.
9. $y'=-y+xe^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.

Exercice 231 *(**)*

1. Résoudre l'équation différentielle $y'=(2x+i)y+xe^{ix}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'-xy=x\sin(x^2)$.
3. Résoudre la système $\left\{\begin{array}{l} x'=2tx-y+t\cos t \\ y'=x+2ty+t\sin t\end{array}\right.$ en posant $u=x+iy$.

Exercice 232 *(**)CCP* Résoudre $y'-\tan(x)y+\cos^2(x)=0$ sur $]-\dfrac{pi}{2};\dfrac{pi}{2}[$.

Exercice 233 *(**)DS PCSI*

1. Résoudre $x(2-x)y'+(1-x)y=0$ sur $]0;2[$.
2. Résoudre $x(2-x)y'+(1-x)y=1$ sur $]0;2[$ *on utilisera une fonction arcsin.*

2 Recollement

Exercice 234 *(**)*Déterminer les solutions réelles <u>dérivables sur $\mathbb{R}$</u> des équations différentielles suivantes :

1. $x^3y'-2y=0$
2. $x^3y'+2y=0$
3. $(1-x)y'-y=x$
4. $(x-4)y'+(x-2)y=0$
5. $xy'+y=\cos(x)$. On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-x}{x^2}=0$.

Exercice 235 *(*)*Résoudre $xy'-y=x^3$ **<u>sur $\mathbb{R}$</u>**.

Exercice 236 *(*)*Résoudre $y'+min(0,t)y=0$ **<u>sur $\mathbb{R}$</u>**.

Exercice 237 Déterminer les solutions réelles <u>dérivables sur $]-\infty;1[$</u> de l'équation différentielle : $x(x-1)y'-(x-2)y=0$
en sachant que $\dfrac{X-2}{X(X-1)}=\dfrac{2}{X}-\dfrac{1}{X-1}$.

3 Equation d'ordre 2

Exercice 238 *(*)* Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y''-y=\mathrm{sh}(x)$.
2. $y''+(1+2i)y'+(i-1)y=0$
3. $y''+y'+\dfrac{y}{2}=\sin(x)$.
4. $y''-3y'+2y=e^x+2e^{3x}$.
5. $y''-2y'+2y=e^x\cos(x)$.
6. $y''-4y'+3y=x^2$.
7. $y''-2(1+i)y'+2iy=x+i$, $y(0)=y'(0)=0$.

Exercice 239 *(**)*Résoudre, sur $\mathbb{R}$, $y^{(4)}-2y''+y=0$ en posant $z=y''-y$.

Exercice 240 *(**)*Résoudre, sur $\mathbb{R}$, $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$ en posant $z = (y' + y)e^x$.

Exercice 241 *(**)*On considère l'équation différentielle suivante $(E) : (1+x)y'' - y' - xy = 0$. Le but de l'exercice est de trouver les solutions de (E) sur $]-1;+\infty[$. On considérera donc uniquement des fonctions définies sur $]-1;+\infty[$.

1. Montrer que $x \mapsto e^x$ est solution de (E).
2. On considère y une solution de (E). On pose $z(x) = y(x)e^{-x}$ (méthode de Laplace).
   (a) Montrer que y est solution de (E) ssi $(1 + x)z'' + (2x + 1)z' = 0$.
   (b) En déduire les solutions de (E).

Exercice 242 *(**)*Résoudre, sur $\mathbb{R}$, $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$ en s'inspirant de la méthode de variation de la constante pour trouver y_p.

Exercice 243 *(**) CCP* On considère l'équation différentielle suivante $(E) : x^2y'' + 3xy' + y = 0$. Le but de l'exercice est de trouver les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$. On considérera donc uniquement des fonctions définies sur $]0;+\infty[$.

1. Soit y une solution de (E). On pose $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(e^t)$. Montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 244 *(**)*Résoudre, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x^4y'' + 2x^3y' - y = e^{1/x}$ en posant $t = 1/x$.

Exercice 245 *(**)CCP* Résoudre $(1 + x^2)^2y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $t = \arctan x$.

Exercice 246 *(**)*Résoudre $y'' - (x+1)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ en cherchant y_0 une solution évidente non nulle et en posant $z = \dfrac{y}{y_0}$.
on conservera une expression contenant une intégrale

4 Equation fonctionnelle

Exercice 247 *(**)*Déterminer l'ensemble des applications continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1$$

Exercice 248 *(**)*Déterminer l'ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x$$

indication : on pourra montrer qu'une telle application est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 249 *(**) CCP*
Déterminer l'ensemble des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(2 - x)$$

Exercice 250 *(**)*Soient f C^2 sur $\mathbb{R}$ et g définie par $g(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x (x - t)f(t)dt$.

1. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner g''.
2. Résoudre alors $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x - t)f(t)dt = x^2$.